wissenschaft in die schulen!

Die Lagrange-Punkte – mehr als nur eine Lösung einer Differentialgleichung

Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1

Recherchiere: Wofür werden Satelliten und Raumsonden eingesetzt und welche Flugbahnen sind dafür jeweils von Vorteil?

Je nach Aufgabenbereich unterscheiden wir die verschiedensten Satelliten:

Satellit	Aufgabe
Nachrichtensatelliten	Übertragung von Nachrichten
Erdbeobachtungssatelliten	Beobachtung des Wetters (Wettersatelliten), der Erde im militärischen Sinn (Spionagesatelliten) oder auch zu wissenschaftlichen Zwecken.
Fernsehsatelliten	Übertragen von Fernsehprogramme direkt an den Zuschauer.
Astrometriesatelliten	Beobachtung des Weltalls für wissenschaftliche Zwecke.
Killersatelliten	Zerstörung anderer Satelliten.
Forschungssatelliten	Durchführung von wissenschaftlichen Forschungsaufträgen.
Spionagesatelliten	Ausspionieren z.B. feindlicher Staaten, Schiffsbewegungen und der Überwachung von Rüstungsbegrenzungsabkommen. Sie werden von militärischen Behörden und Geheimdiensten betrieben und sind oft streng geheime Projekte.
Raumstationen	Sie sind im wesentlichen auch Satelliten, die primär wissenschaftlichen Zwecken dienen.

Die Flugbahn eines Erdsatelliten (*Orbit*) wird entsprechend seines Missionsprofils ausgewählt: Beobachtungssatelliten sollten möglichst tief fliegen, damit sie auch viele Details erkennen können. Spionagesatelliten fliegen sogar manchmal so tief, dass die Reibung mit der Atmosphäre die Lebensdauer auf wenige Monate beschränkt. Kommunikationssatelliten sollten wiederum ortsfest über der Erde stehen, daher umkreisen sie die Erde in einem sehr großen Abstand auf einer *geostationären Bahn* (siehe Aufgabe 2).

Aufgabe 2

Vielen bekannt ist die sog. *geostationäre Flugbahn* eines Satelliten: Ein Satellit fliegt auf einer zur Erddrehung synchronen Bahn oberhalb des Erdäquators, das heißt er bewegt sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie die Erde. Berechne, welche Höhe über dem Erdboden ein derartiger Satellit haben muss?

Ein geostationärer Satellit fliegt auf einer Kreisbahn mit dem Radius r um die Erde. Es herrscht ein Kräftegleichgewicht zwischen der Radial- und Gravitationskraft:

$$F = m\,a = m\,\omega^2 r = \mathrm{G}\frac{Mm}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\mathrm{G}\frac{M}{\omega^2}}$$

Mit der Winkelgeschwindigkeit ω der Erde bzw. des geostationären Satelliten

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi\frac{1}{T}$$

ergibt sich

$$r = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{G}}{4\pi^2}MT^2}$$

Die Höhe h über dem Erdboden ergibt sich mit R als Radius der Erde zu:

$$h = r - R = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{G}}{4\pi^2}MT^2} - R = 35\,786\,\mathrm{km}$$

$\mathrm{G} = 6{,}674\ 10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$
$M = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg
T = 23h 56m 4,09 s = 86 164,09 s
R = 6371 km

Aufgabe 3

Ermittle die wahre Geschwindigkeit eines Punktes auf der Erdoberfläche in Abhängigkeit der geographischen Breite φ seines Standortes. Vergleiche diese Werte mit denen anderer Planeten aus unserem Sonnensystem (z.B. den Gasriesen). Was fällt Dir auf?

Die wahre Geschwindigkeit v eines Punktes auf der Erde lautet:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi\,R\cos\varphi}{T} = 0{,}46\,km/s\cdot\cos\varphi$$

Für die Planeten unseres Sonnensystems ergeben sich folgende wahre Geschwindigkeit am Äquator *(φ = 0°)*:

Merkur (0,003 km/s), Venus (0,002 km/s), Erde (0,46 km/s) Mars (0,24 km/s), Jupiter (12,7 km/s), Saturn (10,3 km/s), Uranus (2,6 km/s), Neptun (2,7 km/s).

Es fällt auf, dass die Gasriesen eine deutlich höhere Geschwindigkeit haben, als die erdähnlichen Planeten.

Aufgabe 4

Führe Newtons Mondrechnung selbst durch.

Infolge der Erdanziehung fällt der Apfel gleichmäßig beschleunigt auf die Erde mit Radius R_{Erde}. Aus dem gleichen Grund fällt auch der Mond ständig in Richtung auf die Erde: er bleibt auf seiner Kreisbahn mit Radius r, statt tangential weg zu fliegen. Radial- und Erdbeschleunigung müssen sich daher genau wie die Anziehungskräfte umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhalten.

Mond: $$a_{Mond} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$$

Umlaufzeit Mond $T = 27{,}32$ d
Entfernung Mond-Erde $r = 3{,}83 \cdot 10^8$ m = 60 R_{Erde}

Apfel: $$a_{Apfel} = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \quad .$$

Es ist zu prüfen:

$$\frac{a_{Apfel}}{a_{Mond}} = \frac{r^2}{R_{Erde}^2}$$

$$\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}} = \frac{(60\mathrm{R}_{Erde})^2}{R_{Erde}^2}$$

$$3600 = 3600$$

Damit ist gezeigt, dass sich die Beschleunigungen verhalten wie die umgekehrten Quadrate der Entfernungen.

Aufgabe 5:

Leite das Gravitationsgesetz unter der Annahme ab, dass sich ein Planet der Masse m auf einer Kreisbahn um einen Zentralkörper der Masse M bewegt. (Tipp: 3. Keplersches Gesetz).

Auf den mit der Winkelgeschwindigkeit ω umlaufenden Körper der Masse m übt die Zentralkraft der Masse M die folgende Radialkraft aus:

$$F_1 = m\,\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

Mit dem 3. Keplerschen Gesetz $\frac{T^2}{r^3} = C$ folgt:

$$F_1 = m\frac{4\pi}{\mathrm{C}\,r^3} \cdot r = C_1 \frac{m}{r^2} \quad .$$

C_1 ist unabhängig von m. Nach dem Wechselwirkungsprinzip übt auch der umlaufende Körper auf den Zentralkörper die entgegengesetzt gleich große Kraft mit dem Betrag F_2 aus, der entsprechend proportional zur Masse M des angezogenen Körpers sein muss:

$$F_2 = C_2 \frac{M}{r^2}$$

C_2 ist unabhängig von M. Mit actio gleich reactio gilt: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, d.h. die Beträge sind gleich:

$$F_1 = F_2 = C_1 \frac{m}{r^2} = C_2 \frac{M}{r^2} \quad .$$

Da C_2 unabhängig von M ist, muss C_1 direkt proportional zu M sein!

$$C_1 = \mathrm{G}\, M \quad .$$

G nennt man die Gravitationskonstante. Ihr Wert beträgt G = 6,672 $\cdot 10^{-11}$ $m^3/kg\ s^2$. Damit ergibt sich:

$$F_1 = F_2 = C_1 \frac{m}{r^2} = \mathrm{G}\, M \frac{m}{r^2} = \mathrm{G} \frac{Mm}{r^2} \quad .$$

Aufgabe 6:

Die Kometensonde Rosetta soll im All eine Endgeschwindigkeit von v_E = 3,545 km/s erreichen. Mit welcher Geschwindigkeit muss Rosetta vom Erdboden aus starten?

Geht man von einer Fluchtgeschwindigkeit von v_2 = 11,2 km/s aus, so muss die Ariane 5 eine Geschwindigkeit von

$$v = \sqrt{v_2^2 + v_E^2} = \sqrt{11{,}2^2 + 3{,}545^2} = 11{,}734 \,\mathrm{km/s}$$

erreichen. Es reicht also ein Plus von etwa 0,534 km/s an Geschwindigkeit aus, um eine Endgeschwindigkeit der Sonde von 3,545 km/s zu erreichen.

Aufgabe 7:

Überlege Dir, wann Lissajous-Figuren geschlossene Bahnen ergeben! Versuche mit dem Pendelversuch nichtgeschlossene Figuren herzustellen!
Bei den Lissajous-Figuren handelt es sich um Kurvengraphen, die durch die Überlagerung zweier zueinander senkrecht stehender linearer harmonischer Schwingungen entstehen. Das Aussehen ist abhängig vom Frequenzverhältnis und der Phasenwinkeldifferenz zu Anfang. Stehen beide Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander, so ändert sich die Lissajous-Figur nicht, die Bahnkurve ist geschlossen. Anderenfalls überstreift die Lissajous-Schleife mit der Zeit die gesamte Fläche.

Aufgabe 8:

Recherchiere im Internet, welche Satelliten und Raumsonden bereits zu den Librationspunkten des Systems Sonne-Erde geschickt wurden. Welche wissenschaftlichen Gründe dafür ergeben sich aus den Missionsprofilen?

Im Internet wird man unter den folgenden Links fündig: ICE (ISEE 3), GENESIS, SOHO, JAMES WEB SPACE TELESCOPE (JWST), DAWIN/TPF, WMAP, HERSCHEL, PLANCK,...