„Steiler oder flacher“ – der schiefe Wurf im Sport

Eine Unterrichtsidee von Matthias Hauck

Die im Folgenden dargestellten Unterrichtsmaterialien wurden zur Einbindung des Artikels „Steiler oder flacher?“ aus der Zeitschrift „Physik in unserer Zeit“ [Thaller und Mathelitsch (2011)] entwickelt. Sie können im Rahmen des Mechanikunterrichts in der Einheit „Wurfbewegungen“ der zehnten Klassenstufe eingesetzt werden. Die entsprechenden Materialien greifen anhand eines Arbeitsblattes Beispiele aus dem Text auf und bieten Lösungsansätze mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems. Sie wurden im Unterricht bereits erfolgreich verwendet.

Fachgebiet	Physik
Bezug zu	Sport, Mathematik, Naturwissenschaft und Technik (NwT)
Thema	Mechanik, Wurfbewegungen
Stichwort	schiefer Wurf, senkrechter Wurf, waagrechter Wurf, Flugbahn, Superposition von Bewegungen
Klassenstufe	10. Klasse
Zeit	1-2 Stunden

Hintergrundinformationen

Wurfbewegungen gehören zum Standardlehrstoff in der klassischen Mechanik. In den meisten Bildungsplänen kommen jedoch nur noch der senkrechte sowie der waagrechte Wurf explizit vor. Dabei ist es gerade der schiefe Wurf, der in unserer alltäglichen Erfahrung eine viel bedeutendere Rolle spielt – vor allem im Bereich des Sports. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten Bewegungen des Sports in den Kinematikunterricht einzubeziehen. Hierbei können die Schülerinnen und Schüler meist recht eigenständig arbeiten. So können sie beispielsweise Flugbahnen von Würfen mit einer Video-Kamera aufnehmen und diese im Anschluss analysieren [Goy (2012)]. Aufbauend auf ihrem Artikel „Jeder Schuss ein Treffer“ (2007) beschreiben Thaller und Mathelitsch in der hier betrachteten Arbeit verschiedene Beispiele schiefer Würfe im Sport. Sie erklären, warum es im Spitzensport oftmals zu Abweichungen von den aus theoretischer Sicht optimalen Winkeln kommt. Das hierzu erstellte Arbeitsblatt geht auf vier Beispiele mit steigendem Schwierigkeitsgrad aus dem Text ein. Dabei bietet es sich an, die Lösungen mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems (CAS) oder einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) zu berechnen respektive zu visualisieren. Entsprechende Beispiel-Worksheets für das CAS-Programm Maple sind beigefügt.

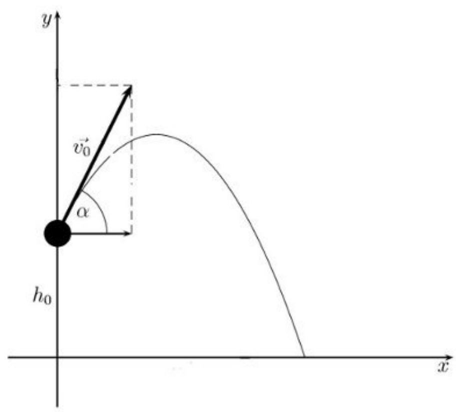

Abbildung 1: Skizze zum schiefen Wurf

Der schiefe Wurf aus einer Höhe h_0 mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 lässt sich, wie in Abbildung 1 dargestellt, als Superposition einer waagrechten und senkrechten Bewegung auffassen. Es gilt:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$
$$v_y = v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t$$

Hieraus folgt direkt für den zurückgelegten Weg in x und y-Richtung:

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha)$$
$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h_0$$

Durch Elimination der Zeit t ergibt sich die Flugbahn des geworfenen Körpers zu einer Wurfparabel der Form:

$$y = -\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha) \cdot x + h_0$$

Mit Hilfe eines CAS oder des GTR lässt sich diese Parabel schön veranschaulichen und man kann leicht die Abhängigkeit der Wurfweite vom Abwurfwinkel α, der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Anfangshöhe h_0 zeigen. Ein entsprechendes Beispiel-Worksheet für Maple steht als Download zur Verfügung. Daraus ist Abbildung 2 exemplarisch entnommen.

Im Folgenden wird nun analytisch die Wurfdauer T, die maximale Wurfweite x_{max} und die maximale Wurfhöhe y_{max} bestimmt. T ergibt sich, indem man in der Formel für die Flugbahn y = 0 setzt:

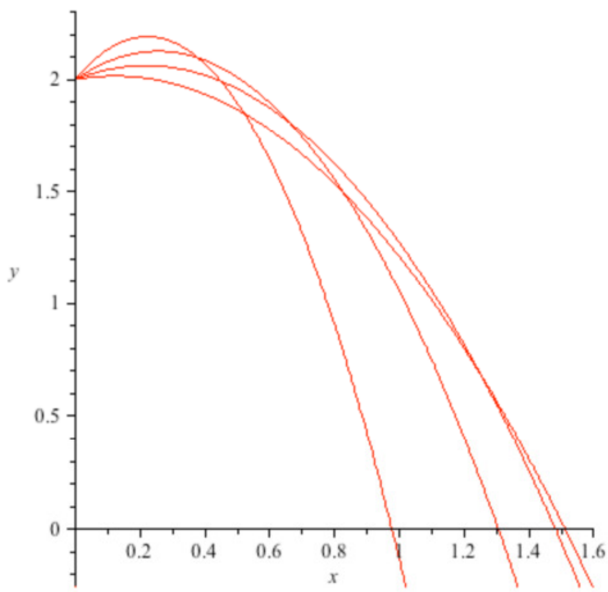

Abbildung 2: Simulation eines schiefen Wurfes unter verschiedenen Abwurfwinkeln

$$0 = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha) \cdot x + h_0$$
$$T_{1,2} = \frac{v_0}{g} \sin(\alpha) \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} sin^2(\alpha) + \frac{2 \cdot h_0}{g}}$$

Das negative Vorzeichen vor der Wurzel würde zu einer negativen Zeit führen, was in diesem Fall keinen Sinn macht. Somit folgt für die maximale Wurfdauer:

$$T = \frac{v_0}{g} \sin(\alpha) + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} sin^2(\alpha) + \frac{2 \cdot h_0}{g}}$$

Eingesetzt in das Weg-Zeit-Gesetz für die y-Komponente der Bewegung ergibt sich die maximale Wurfhöhe zu

$$y_{max} = h_0 + \frac{v_0^2 \cdot sin^2(\alpha)}{2g}$$

Einsetzen von T in das Weg-Zeit-Gesetz für die x-Komponente der Bewegung liefert die maximale Wurfweite

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos(\alpha) \left(\sin(\alpha) + \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2 \cdot g \cdot h_0}{v_0^2}} \right)$$

Mit einer Abwurfhöhe h_0 = 0 m und unter Verwendung der Additionstheoreme folgt als Wurfweite

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot sin(2\alpha)$$

Da die Sinusfunktion bei 90° ihren maximalen Wert annimmt, ergibt sich für den optimalen Anfangswinkel α_{opt} = 45°. Mit Hilfe der Differentialrechnung folgt schließlich für beliebige Anfangshöhen

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2}}$$

und für den optimalen Abwurfwinkel

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{g \cdot h}{v_0^2 + g \cdot h} \right)$$

Literatur

S. Thaller und L. Mathelitsch (2011). *Steiler oder flacher?* Physik in unserer Zeit, 42: 40–43.

S. Thaller und L. Mathelitsch (2007). *Jeder Schuss ein Treffer.* Physik in unserer Zeit, 38: 30–33.

A. Goy (2012). *Funktionen ‚outdoor' erfahrbar machen – Digitale Videoanalyse und Modellierung von Wurfparabeln.* Praxis der Mathematik in der Schule, 47/54: 41–42.