

Abplattung – ein Designmerkmal kosmischer Objekte

Olaf Fischer

Wenn es um die Größe der Erde geht, dann erfährt der Schüler, dass es einen Äquatorradius und einen Polradius gibt, die sich etwa um 20 km unterscheiden. Im Physikunterricht wird diese Tatsache durch die Angabe der entsprechend verschiedenen Ortskonstanten (Fallbeschleunigungen) ergänzt ($9,78033 \text{ m/s}^2$ am Äquator und $9,83219 \text{ m/s}^2$ an den Polen).

Die Rotation ist ein Bewegungszustand, dem Teilchen (z. B. Atome, Moleküle, Staubteilchen) und Körper (z. B. Monde, Planeten, Sterne) im Kosmos im Allgemeinen unterworfen sind. Im Verein mit der allmächtigen Gravitation sorgt sie für das Aussehen (Design) der kosmischen Systeme und Körper. Entsprechend weisen Sterne und Planeten oftmals eine von der Kugelgestalt abweichende und durch die Abplattung beschriebene Form auf.

Die Rotation der Sonne zeugt von der Drehung des solaren Urnebels, in dem sie entstanden ist. Die Abplattung des Urnebels war Voraussetzung zur Bildung des Planetensystems.

Im Folgenden werden zunächst einfache [Experimente](#) aufgeführt, die es erlauben, den Abplattungseffekt erlebbar zu machen. In einem [ersten Arbeitsblatt](#) wird die Geometrie bemüht, und die Schüler können nach dem Motto „Astrobilder lesen lernen“ die Abplattung von Saturn selbst bestimmen. Das [zweite Arbeitsblatt](#) nutzt die Abplattung von Himmelskörpern als interessanten Inhalt, um Prozentangaben zu üben. Die abschließende [Abschätzung der Rotationsdauer](#) basierend auf der geometrischen Abplattung ist eine Aufgabe für physikalisch Interessierte und kann auch als Programmieraufgabe für den Taschenrechner oder den Computer vergeben werden.

Übersicht der Bezüge im WiS!-Beitrag		
Physik	Mechanik	Ortskonstante (Fallbeschleunigung) , Rotation Zentrifugalbeschleunigung , Winkelgeschwindigkeit
Astronomie	Sterne, Planeten, Astropraxis	Sonne , Saturn , Astrobilder lesen lernen
Fächer- verknüpfung	Astro-Ma, Astro-Geo	Mittelsenkrechte , Prozentrechnung , Rotationssymmetrie , Abplattung der Erde (zwei Erdradien)



Abbildung 1: Während man bei Saturn die Abplattung sofort bemerkt, muss man die Sonne mit speziellen Hilfsmitteln vom Weltraum aus beobachten, um ihre Abplattung aufzuspüren (Bilder: HST-Aufnahme von Saturn im Juni 2018, ©: By NASA, ESA, Amy Simon and the OPAL Team, and J. DePasquale (STScI) - <https://www.nasa.gov/feature/goddard/2018/saturn-and-mars-make-closest-approaches-in-2018>, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=81218622>, NASA. Sonne im Visuellen. ©: NASA - <http://solarscience.msfc.nasa.gov/surface.shtml>, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=184248>, Gemeinfrei.

Abplattung durch Rotation in Experimenten

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

Ein nicht rotierender Himmelskörper nimmt aufgrund der zentralsymmetrisch wirkenden Gravitation Kugelgestalt an (wenn er verformbar genug ist). Die Rotation dagegen wirkt axialsymmetrisch. Aus der Kugel wird ein Rotationsellipsoid – er plattet sich ab.

Diese Tatsache lässt sich mit Hilfe einfacher Versuche (siehe Abb. 2) demonstrieren. Dazu braucht man entweder Geräte von Lehrmittelfirmen wie die in den oberen Bildern dargestellte Schwungmaschine (mit Kurbel) und ein oder zwei (Erd-)Abplattungsringe aus Federstahl. Man kann sich aber auch mit einem Freihandexperiment (untere Bildreihe behelfen).

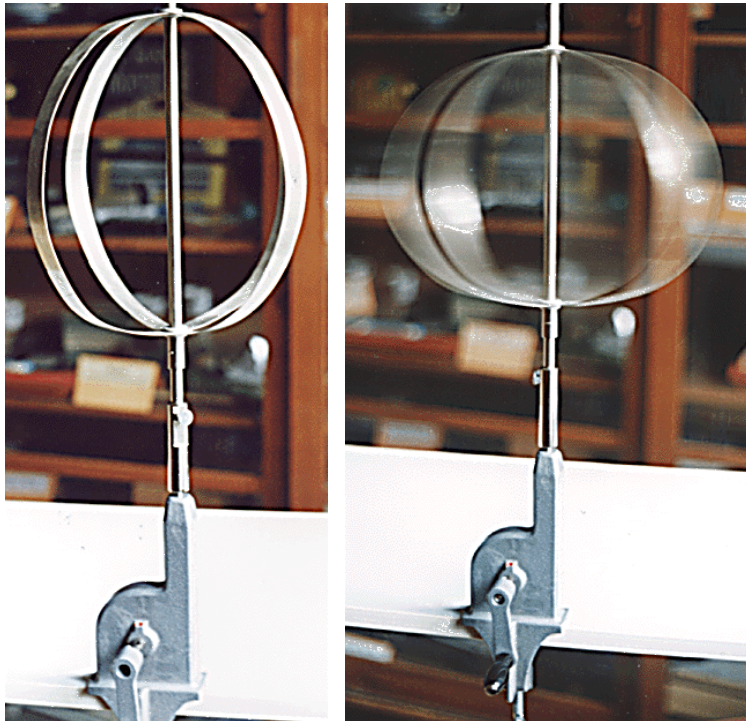
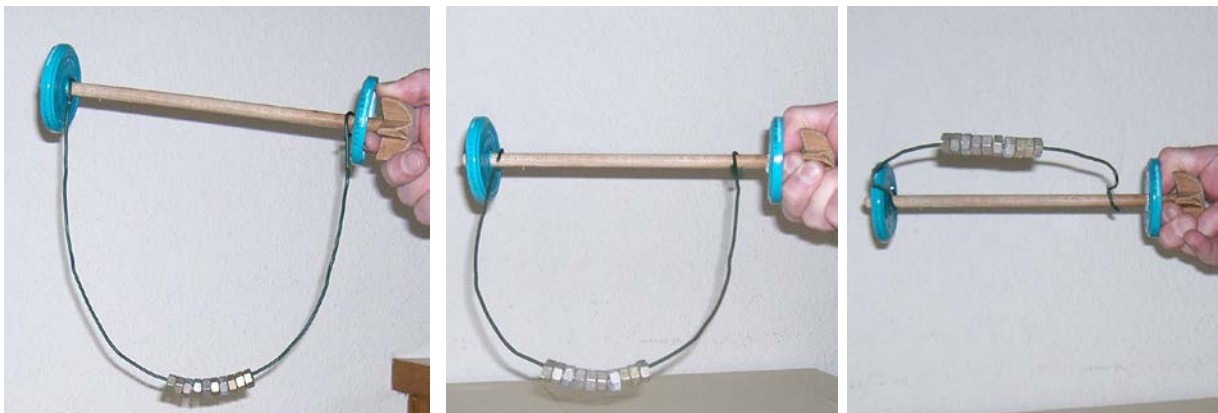


Abbildung 2: Schulversuche zur qualitativen Demonstration der Abplattung rotierender Himmelskörper. Die Kugelgestalt im Ruhezustand wird bei dem Modellhimmelskörper durch zwei Federstahlreifen (oben) oder einen gebogenen noch federnden Draht (unten) gewährleistet.

Oben: Die Federstahlstreifen der Abplattungsringe sind an einer Seite entlang der Drehachse verschiebbar angebracht, so dass sie bei schneller Rotation abplatteln können. ©: Olaf Fischer.

Unten (Freihandexperiment): Zur Erhöhung der rotierenden Masse wurden einige Muttern über den gebogenen Draht geschoben. Als Rotationsachse wurde der Stab eines Quirls genutzt; die durchlöchernten Blechdeckel von Einweckgläsern fixieren und spannen den rotierenden Draht. Die zwei rechten unteren Bilder zeigen Momentaufnahmen des sich abplattenden rotierenden Drahtbogens. ©: Olaf Fischer.

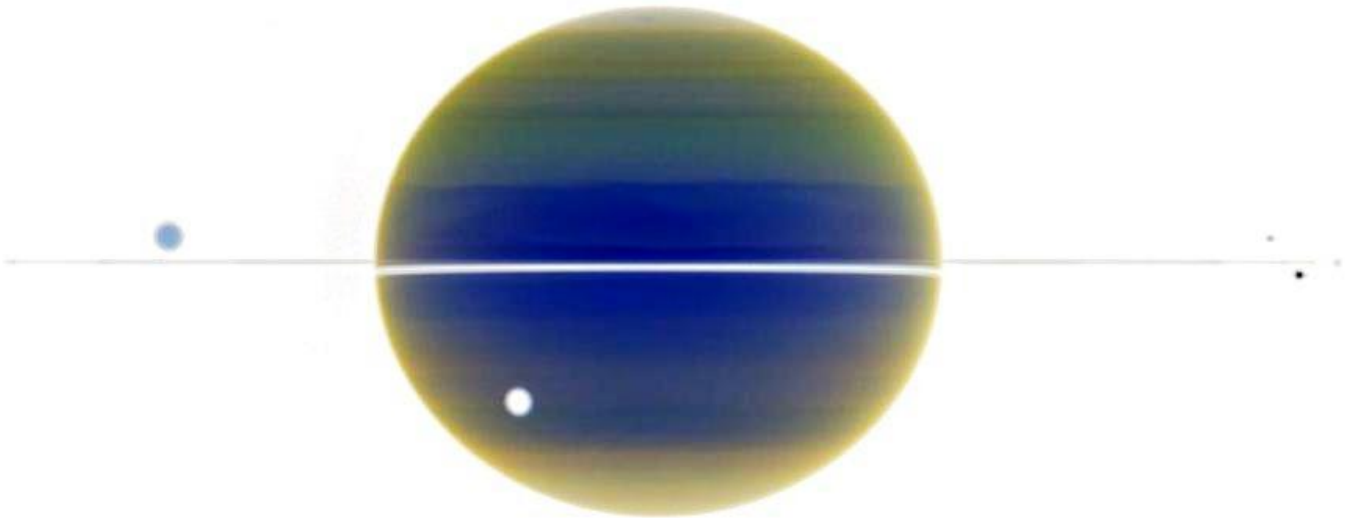


Eine andere Möglichkeit zur Demonstration der Abplattung durch Rotation bietet das so genannte Plateau-Experiment, bei dem ein in einer Spiritus-Wasser-Mischung schwebender Öltropfen zur Rotation gebracht wird (siehe: <http://mhsgent.ugent.be/engl-plat9.html>).

Arbeitsblatt 1: Geometrische Abplattung von Saturn

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

- 1.) Bestimme die Abplattung von Saturn aus der „farbengespiegelt“ (zur Verbesserung des Kontrasts) gegebenen Aufnahme. Achte beim Vermessen der dafür nötigen Durchmesser auf Genauigkeit von Länge und Richtung.



HST-Aufnahme von Saturn mit dem seltenen Blick in die Ringebene am 22. 5. 1995. (Das passiert etwa alle 15 Jahre.)
©: Reta Beebe (New Mexico State University), D. Gilmore, L. Bergeron (STScI), NASA/ESA, Amanda S. Bosh (Lowell Observatory), Andrew S. Rivkin (Univ. of Arizona/LPL), the HST High Speed Photometer Instrument Team (R.C. Bless, PI), and NASA/ESA. <https://cdn.spacetelescope.org/archives/images/screen/opo9525a.jpg>.

- 2.) Wie verändert sich das Ergebnis, wenn Saturn nicht in Kantenstellung seines Rings beobachtet wird, d. h. wenn der Ring wie im Bild rechts besser erkennbar wird?




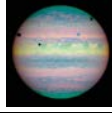

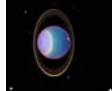
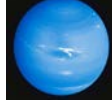




- 3.) Welche Erscheinungen fallen dir bei den Saturnaufnahmen noch auf?

Arbeitsblatt 2: Abplattung von Himmelskörpern – Anteile und Prozente ([↪zum Anfang](#))

Die geometrische Abplattung f entspricht dem Verhältnis des Unterschieds ($R_{\text{Ä}}-R_{\text{P}}$) zwischen Äquatorradius und Polradius zum Äquatorradius $R_{\text{Ä}}$ ($f=(R_{\text{Ä}}-R_{\text{P}})/R_{\text{Ä}}$). Damit handelt es sich um einen Teil vom Ganzen, der auch als Verhältnis oder als **Prozentsatz** ausgedrückt werden kann. Dabei bildet der Äquatorradius den Grundwert und der Unterschied zwischen Äquator- und Polradius den Prozentwert.

Berechne die noch 11 fehlenden Angaben und vervollständige die Tabelle (punktierte Bereiche).

Objekt	Äquatorradius $R_{\text{Ä}}$	Unterschied zwischen Äquator- und Polradius $R_{\text{Ä}}-R_{\text{P}}$	Geometrische Abplattung (in 3 Darstellungsweisen*) f
Mond 	1738 km	3,5 km	1 : 500;; 0,2 %
Erde 	6378,1 km	21,37 km	1 : 298; 0,00335; 0,335 %
Mars 	3397 km	1 : 171; 0,00648; 0,65 %
Jupiter 	4638 km	1 : 15; 0,0649; 6,49 %
Saturn 	60.268 km	5904 km	1 : 10,2; 0,098; %
Uranus 	586 km	1 : 44; 0,02293; 2,3 %
Neptun 	24.764 km	423 km; 0,0171; %
Sonne 	$0,6957 \cdot 10^6$ km (15,5 ')	1 : 86000; 0,000012; 0,0012%
Archenar** (α Eridani) 	$8,4 \cdot 10^6$ km	$3,2 \cdot 10^6$ km;; %

* Verhältnis, Anteil, Prozentsatz; ** der am schnellsten bisher bekannte rotierende Stern

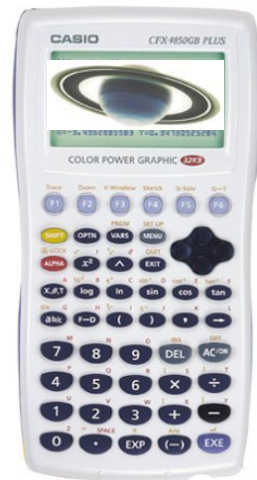
**Abschätzung der Rotationsdauer –
eine Aufgabe für Physiker und Programmierer**

[\(→zum Anfang\)](#)

Zusammenhang

Die Stärke der geometrischen Abplattung eines Himmelskörpers f ($f=(R_{\text{Ä}}-R_{\text{P}})/R_{\text{Ä}}$, $R_{\text{Ä}}$...Äquatorradius, R_{P} ...Polradius) entspricht recht gut dem Verhältnis von Gravitationsbeschleunigung g zu Zentrifugalbeschleunigung a am Äquator. Man kann also schreiben:

$$f \approx \frac{a}{g}.$$



Beispiel

So zum Beispiel hat die Erde am Äquator eine Gravitationsbeschleunigung

(**Fallbeschleunigung**) von $g = \frac{\gamma \cdot M}{R_{\text{Ä}}^2} = 9,81693017 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und eine

Zentrifugalbeschleunigung von $a = \omega^2 \cdot R_{\text{Ä}} = 0,03387776 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

bei der **Winkelgeschwindigkeit** $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Das Verhältnis dieser Beschleunigungen $a : g \approx 1 : 298$ entspricht recht gut dem geometrischen Wert von etwa $f = 1 : 298$.

Anwendung

Die Abbildung einer Planetenscheibe kann also dazu dienen, aus der geometrischen Abplattung auf die Rotationsdauer des Planeten zu schließen (von der Geometrie zur Physik). Für Saturn erhält man ausgehend von der Abplattung von 0,098 eine Rotationsdauer T von rund 13,4 h.

$$\frac{a}{g} = \frac{4\pi^2 \cdot R_{\text{Ä}}^3}{T^2 \cdot \gamma \cdot M} \rightarrow T = \sqrt{\frac{g \cdot 4\pi^2 \cdot R_{\text{Ä}}^3}{a \cdot \gamma \cdot M}}.$$

$$\left(\text{Mit } \frac{a}{g} = 0,098 \text{ erhält man } T = \sqrt{\frac{10,2 \cdot 4\pi^2 \cdot (60.268.000)^3 \text{ m}^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5,685 \cdot 10^{26} \text{ kg}}} \approx 48215 \text{ s} \approx 13,4 \text{ h} \right).$$

Die Ergebnisse für andere Objekte[\(→zum Anfang\)](#)

Objekt samt aller weiteren für die Rechnung nötigen Angaben	$1/f \approx g/a$	Rotationsdauer abgeschätzt	Rotationsdauer beobachtet
Mond $R_{\ddot{A}} = 1738 \text{ km}, M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	500	40,4 h	27,32 d
Erde $R_{\ddot{A}} = 6378,1 \text{ km}, M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	298	24,3 h	24 h
Mars $R_{\ddot{A}} = 3397 \text{ km}, M = 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	171	21,8 h	24,62 h
Jupiter $R_{\ddot{A}} = 71.492 \text{ km}, M = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$	15	11,5 h	9,925 h
Saturn $R_{\ddot{A}} = 60.268 \text{ km}, M = 5,685 \cdot 10^{26} \text{ kg}$	10,2	13,4	10,233 h
Uranus $R_{\ddot{A}} = 25.559 \text{ km}, M = 8,683 \cdot 10^{25} \text{ kg}$	44	19,6 h	17,24 h
Neptun $R_{\ddot{A}} = 24.764 \text{ km}, M = 1,0243 \cdot 10^{26} \text{ kg}$	58	19,8 h	16,11 h
Sonne $R_{\ddot{A}} = 0,6957 \cdot 10^6 \text{ km}, M = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	89.000	34 d	25-34 d (Äquator-Pol)
Archenar * $R_{\ddot{A}} = 8,4 \cdot 10^6 \text{ km}, M \approx 6 M_{\text{Sonne}}$	2,6	3 d	1,4 d ... 2,2 d (versch. Autoren)

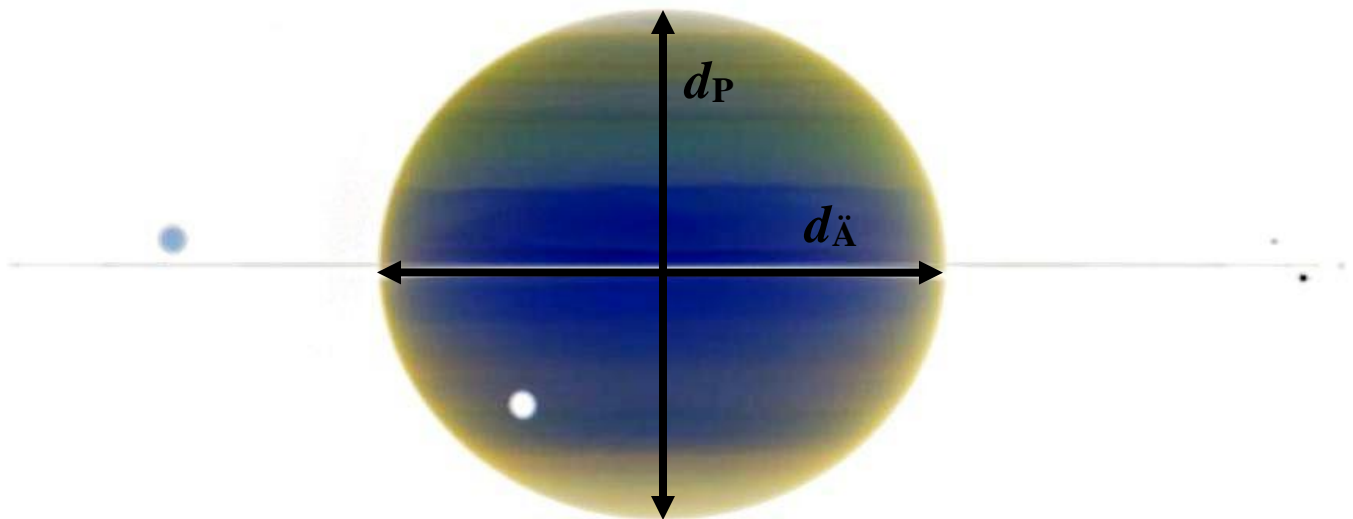
* der am schnellsten bisher bekannte rotierende Stern

Die Abweichungen

- Bei den Ergebnissen fällt der Mond deutlich heraus. Dies liegt an der Gravitationswirkung der Erde auf den Mond, unter deren Einfluss (Gezeitenkraft) der Mond sich länglich in Richtung Erde verformt.

Ergebnisse zum Arbeitsblatt 1: Geometrische Abplattung von Saturn ([←zum Anfang](#))

- 1.) Bestimme die Abplattung von Saturn aus der gegebenen „farbengespiegelt“ (zur Verbesserung des Kontrasts) Aufnahme. Achte beim Vermessen der dafür nötigen Durchmesser auf Genauigkeit von Länge und Richtung.



$D_{\ddot{A}} = 7,5 \text{ cm}$, $D_P = 6,7 \text{ cm}$; $D_{\ddot{A}}$ wird entlang der Verbindungslinie zwischen den beiden Scheibenenden (-spitzen) gemessen, D_P ist die **Mittelsenkrechte** auf $D_{\ddot{A}}$.

$$f = \frac{R_{\ddot{A}} - R_P}{R_{\ddot{A}}} = \frac{\frac{D_{\ddot{A}}}{2} - \frac{D_P}{2}}{\frac{D_{\ddot{A}}}{2}} = \frac{\frac{7,5 \text{ cm}}{2} - \frac{6,7 \text{ cm}}{2}}{\frac{7,5 \text{ cm}}{2}} \approx 0,107 \%$$

- 2.) Wie verändert sich das Ergebnis, wenn Saturn nicht in Kantenstellung seines Rings beobachtet wird, d. h. wenn der Ring wie im Bild rechts besser erkennbar wird?



Wenn Saturn nicht in seiner Äquatorebene (entspricht der Ringebene) ersichtlich wird, dann kann d_P nicht von „Rand zu Rand“ an der sichtbaren Planetenscheibe gemessen werden. Der in Achsrichtung gemessene Durchmesser ist größer als d_P (obwohl d_P perspektivisch verkürzt wird). Entsprechend erscheint Saturn in dieser Lage weniger abgeplattet.




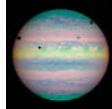

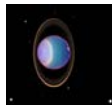
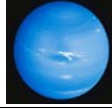


- 3.) Welche Erscheinungen fallen dir bei den Saturnaufnahmen noch auf?

- Die Oberfläche von Saturn erscheint streifig mit einer Ausrichtung parallel zur Äquator des Planeten.
- Der Ring von Saturn (der immer noch ein klein wenig geneigt erscheint) ist geometrisch sehr dünn.
- Ein großer Mond (Titan) ist links von Saturn sichtbar, sein etwa gleich großer Schatten fällt unten links auf die Saturnscheibe.
- Rechts von Saturn erscheinen zwei Monde und ein Stern (der durch seine viel größere Helligkeit auffällt).

Ergebnisse zum Arbeitsblatt 2:[\(→zum Anfang\)](#)**Abplattung von Himmelskörpern – Anteile und Prozente**

Die geometrische Abplattung f entspricht dem Verhältnis des Unterschieds ($R_{\text{Ä}} - R_{\text{P}}$) zwischen Äquatorradius und Polradius zum Äquatorradius $R_{\text{Ä}}$ ($f = (R_{\text{Ä}} - R_{\text{P}}) / R_{\text{Ä}}$). Damit handelt es sich um einen Teil vom Ganzen, der auch als Verhältnis oder als **Prozentsatz** ausgedrückt werden kann. Dabei bildet der Äquatorradius den Grundwert und der Unterschied zwischen Äquator- und Polradius den Prozentwert.

Berechne die noch 11 fehlenden Angaben und vervollständige die Tabelle (punktierte Bereiche).

Objekt	Äquatorradius $R_{\text{Ä}}$	Unterschied zwischen Äquator- und Polradius $R_{\text{Ä}} - R_{\text{P}}$	Geometrische Abplattung (in 3 Darstellungsweisen*) f
Mond 	1738 km	3,5 km	1 : 500; 0,002; 0,2 %
Erde 	6378,1 km	21,37 km	1 : 298; 0,00335; 0,335 %
Mars 	3397 km	22 km	1 : 171; 0,00648; 0,65 %
Jupiter 	71.492 km	4638 km	1 : 15; 0,0649; 6,49 %
Saturn 	60.268 km	5904 km	1 : 10,2; 0,098; 9,8 %
Uranus 	25.559 km	586 km	1 : 44; 0,02293; 2,3 %
Neptun 	24.764 km	423 km	1 : 58; 0,0171; 1,71 %
Sonne 	0,6957 · 10 ⁶ km (16 ')	8 km (10,8 · 10 ⁻³ ")	1 : 89.000; 0,0000125; 0,00125%
Archenar (α Eridani) 	8,4 · 10 ⁶ km	3,2 · 10 ⁶ km	1 : 2,6; 0,38; 0,0038 %

* Verhältnis, Anteil, Prozentsatz; ** der am schnellsten bisher bekannte rotierende Stern