Kepler für Kids

Olaf Fischer

Vor 40 Jahren flogen Menschen zum Mond und konnten dies nur, weil man die Gesetze der Himmelsmechanik beherrschte. Wichtige empirische Grundlagen dazu wurden vor 400 Jahren von Johannes Kepler in seinem Buch „Astronomia Nova“ gelegt. Er schaffte es, die Denkweise des Altertums, nach der die himmlische Bewegung nicht der irdischen Natur folgen muss, endgültig zu durchbrechen. Seine Erkenntnisse über die Planetenbewegung werden heute als die drei Keplerschen Gesetze bezeichnet.

Im Folgenden werden 11 Ideen vorgestellt, um die Keplerschen Gesetze stark handlungsorientiert und unter verschiedenen Blickwinkeln erfahrbar zu machen. Die Angebote reichen von Schülerübungen bis hin zu Projektideen, fordern und fördern ein Spektrum von Fähigkeiten, sind methodenvariabel und Fächer verknüpfend. Hinsichtlich der Fächer verknüpfenden Kraft der Astronomie sei auf einen Link zu einer äußerst gelungenen Schülerarbeit, den „Kepler-Stundenplan“, hingewiesen:
http://www.kepler-gesellschaft.de/Kepler-Foerderpreis/2006/Platz1_Faecheruebergreifend/index.html

Übersicht der Bezüge im WiS!-Beitrag		
Physik	**Mechanik, Schwingungen und Wellen**	**Keplersche Gesetze, Winkelgeschwindigkeit, Flüstergewölbe,**
Astronomie	**Sterne, Planeten, Kleinkörper, Astropraxis**	**Sonne, Erde, Mars, Mond, Planetenabstand, Komet Halley, Perihel, Aphel, Marsbahn, Mondbahn, Kometenbahn, Sonnenprojektion, Durchgangszeitmessung**
Fächer-verknüpfung	**Astro-Ma, Astro-Bio, Astro-Musik, Astro-Geo, Astro-Info**	**Gärtnerkonstruktion, Ellipse, Halbachsen, Brennpunkt, Logarithmengesetze, Nierensteinzertrümmerung, Intervalle, Erdbahn, Perihel, Aphel, fernbedienbare Rechenprogramme im Internet**
Lehre allgemein	**Lehrform**	**Praktikumsaufgabe**

Abbildung 1: Kinder sammeln gern. Dabei können sie bemerken, dass die Keplerschen Gesetze nicht nur in der Schule eine Würdigung erfahren. Links: zweite deutsche 10 Euro Gedenkmünze des Jahres 2009. ©: User: Gollmann - eigener Scanner, PD-Amtliches Werk, https://de.wikipedia.org/w/index.php?curid=8023269, https://de.wikipedia.org/w/index.php?curid=8023241. Rechts: Sonder-Briefmarke der Deutschen Post AG. Sondermünze und Sonderbriefmarke wurden im Auftrag des Bundesministeriums für Finanzen herausgebracht.

1. Keplersches Gesetz

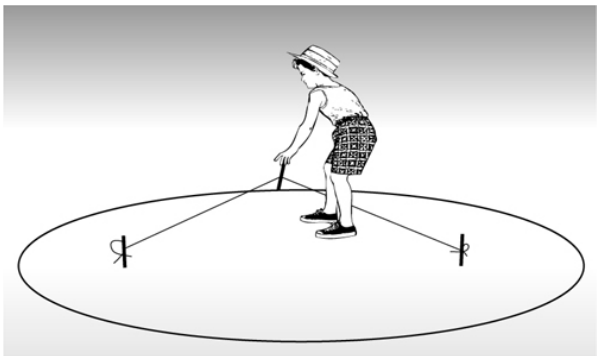
(→zurück zum Anfang)

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Ellipsenkonstruktion als Außenaktion

Die Ellipse war schon bei den alten Griechen bekannt. Beliebt war sie zu späterer Zeit in den Schlossgärten des Barock, wo Beete und Rasenflächen mit Hilfe der sogenannten **Gärtnerkonstruktion** in Ellipsenform angelegt wurden.

Das Aufzeichnen einer Ellipse mit Kreide auf dem Schulhof oder mit einem Stock in den Erdboden kann für Abwechslung im Geometrieunterricht sorgen. Für die Gärtnerkonstruktion benötigt man lediglich zwei Fixpunkte, einen Bindfaden, der länger als der Fixpunktabstand sein muss und ein „Zeichengerät". Wie verändern sich die Ellipsen, wenn der Bindfaden immer länger gewählt wird?



Frage nach Ellipsendefinition mit Punkten und Abständen

Die Gärtnerkonstruktion bietet einen intuitiven Zugang zu einer möglichen Ellipsendefinition, die auf den geometrischen Begriffen Punkt und Abstand basiert. Als Vorkenntnis kann der **Kreis** dienen, für den gilt, dass alle seine Kurvenpunkte den gleichen (konstanten) Abstand zu einem Punkt (dem Mittelpunkt) haben.

Aufgaben: Welche Angaben sind nötig, um Ort, Lage und Aussehen einer **Ellipse** eindeutig zu beschreiben? Zeichne eine Ellipse mit Hilfe der Gärtnerkonstruktion in dein Heft und markiere Größen, die deiner Meinung nach wichtig sind. Vergleiche jeweils mit dem Kreis.

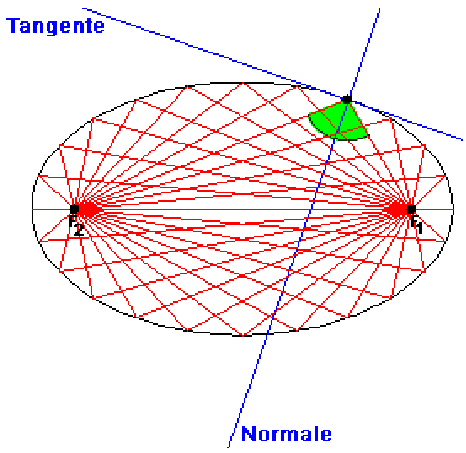
Was kann über die Streckensumme $\overline{F_1P} + \overline{PF_2}$ ausgesagt werden?

Die Zentrumsfrage – Information und Fortsetzung der Außenaktion

Wie in SuW 12/2009 auf Seite 45 oben links nachzulesen ist, suchte Kepler nach einer Planetenbahn, die auch dem Anspruch genügt, dass sich die (wahre) Sonne in ihrem Zentrum befindet (bei Kopernikus war dies ohne Belang).

Die **Brennpunkte** F_1 und F_2 sind ausgezeichnete Punkte in einer Ellipse. Ihren Namen haben sie daher, weil sich alle von einem Brennpunkt ausgesandten Strahlen (Wellennormalen) im anderen Brennpunkt wieder treffen. Dieser Ellipsenspiegel findet Anwendung z. B. in der Medizin bei der Fokussierung von akustischen Stoßwellen zur Zertrümmerung von Nierensteinen oder bei so genannten Flüstergewölben bzw. Flüstergalerien. Dabei handelt es sich um einen Raum mit elliptischer Wand, der es ermöglicht, geflüsterte Worte am Ort von F_1 an der Position von F_2 hören zu können.

Die oben vorgeschlagene Konstruktion einer großen Ellipse im Außenbereich kann durch eine **Flüstergalerie** ergänzt werden, indem entlang der Ellipsenlinie eine etwa tischhohe Wand (z. B. aus Stoff oder dicker Folie) aufgestellt/aufgespannt wird.



Ellipsenspiegel. ©: de:Benutzer:Wfstb - Eigenes Werk, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=50637993.

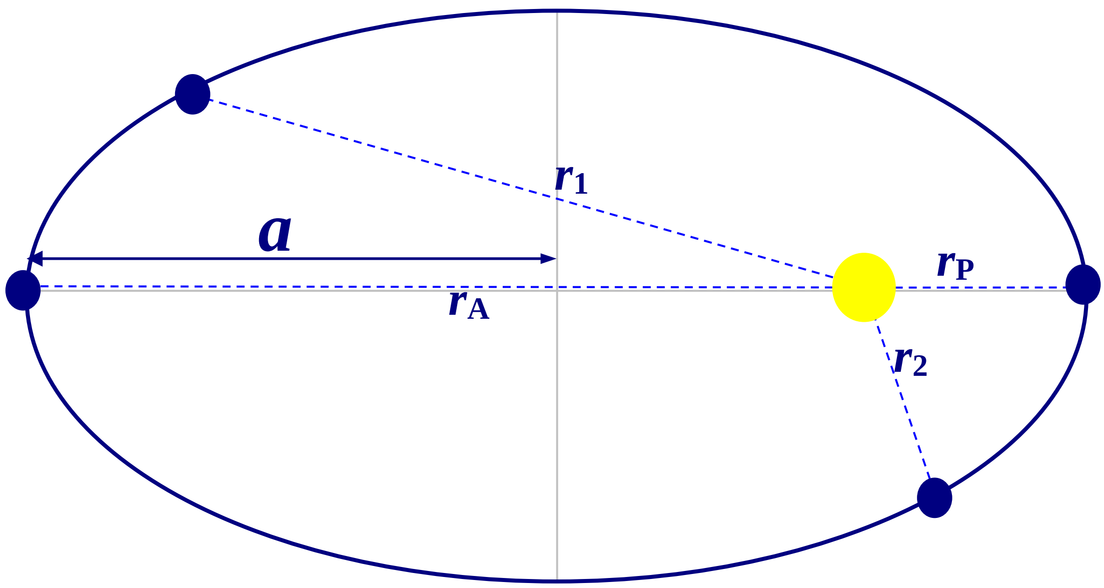
Die Frage nach den Abständen der Planeten

(→zurück zum Anfang)

Sobald man sich der Tatsache bewusst wird, dass die Planeten im Laufe ihrer Umläufe verschiedene Abstände zur Sonne haben, ist die Frage nach dem **Planetenabstand**, den man zu lesen oder hören bekommt, reif. Welchen Wert soll man nun angeben?

Die Abstände der Planeten reichen vom kleinsten Sonnenabstand, dem **Perihel** (r_P), bis zum größten Sonnenabstand, dem **Aphel** (r_A). r_1 und r_2 kennzeichnen zwei beliebige Abstände dazwischen.

1.) Wie groß ist der Mittelwert aus r_P und r_A?



Die Abstände der Planeten nehmen Werte zwischen r_P und r_A ein, wobei alle Werte r_1 und r_2 symmetrisch zur waagerechten Achse zweifach vorkommen (r_1' und r_2').

2.) Zeichne auch die Positionen der Erde bei r_1' und r_2' ein und markiere die Abstände r_1' und r_2'. Überlege nun, wie groß der Mittelwert aus allen möglichen Planetenabständen ist.

Nun hält sich ein Planet aber nicht bei jedem Abstand gleich lange auf.

3.) Welche Konsequenz hat dies? Begründe deine Antwort.

Die Erdbahnellipse beobachten – ein Jahresprojekt

(→zurück zum Anfang)

Auch die **Erdbahn** ist eine Ellipse, wenn auch eine mit geringer Exzentrizität (Abweichung vom Kreis). Anfang Januar (2.-4. Januar, je nach Jahr im Schaltzyklus des Kalenders) durchläuft die Erde im Abstand von ca. 147,099 Mio km ihr Perihel. Das Aphel (ca. 152,096 Mio km) erreicht sie im Zeitraum 3.-6. Juli.

Die Abstandsänderung zur Sonne spiegelt sich in der Änderung des scheinbaren Durchmessers (Winkeldurchmesser) der Sonnenscheibe am Himmel wider. Bei einem wahren Sonnendurchmesser von rund 1,4 Mio km schwankt der scheinbare Sonnendurchmesser entsprechend den oben genannten Werten zwischen rund 31,64' und 32,72'.

Die **Aufzeichnung der scheinbaren Durchmesser der Sonne** über das Jahr hinweg ist eine Aufgabe, die schon mit relativ einfachen Hilfsmitteln, wie z. B. dem im Bild gezeigten Solarscope zu machen ist. Dieses Projekt erfordert Genauigkeit und Durchhaltevermögen. Das Ziel könnte darin bestehen, Perihel- und Aphelentfernung oder sogar die Parameter der Erdbahnellipse zu bestimmen.

Hinweise

Es wird eine Tabelle mit folgenden Einträgen benötigt:
Datum, **Durchgangszeit**, Deklination der Sonne (siehe Jahrbuch), scheinbarer Sonnendurchmesser, Abstand (wird berechnet) und ggf. geozentrische(r) Länge(n)grad) der Sonne (siehe Jahrbuch) und daraus folgend die heliozentrische Länge der Erde.

Die Positionen der Erde können dann in ein Polarkoordinatensystem (Abstand, heliozentrische Länge, siehe Aufgabe zur Konstruktion der Marsbahnellipse) eingetragen werden. Schließlich wird die Erdbahnellipse ermittelt, die die Positionen im Diagramm am besten annähert.

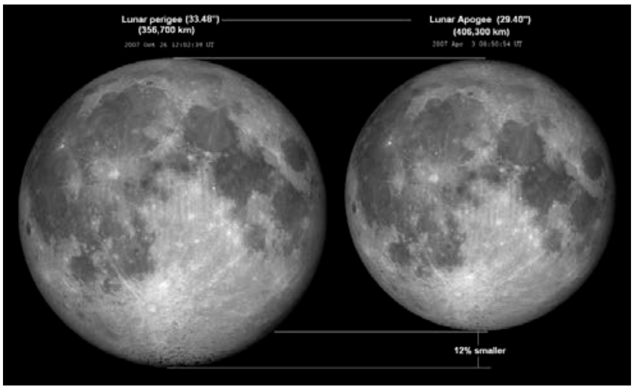
Die Bestimmung des scheinbaren Sonnendurchmessers aus Messungen der Durchgangszeit der Sonne wird in der **Anleitung Durchgangszeit.pdf** beschrieben, welche als didaktisches Material anhängt.

Den schwankenden Monddurchmesser registrieren – auch ein Jahresprojekt

Die **Mondbahn** ist elliptisch genug, um eine Schwankung des Winkeldurchmessers des Mondes fotografisch registrieren zu können. Dazu ist die Verwendung eines Teleobjektivs oder Fernrohrs ratsam.

Die im Bild rechts gezeigten Mondbilder sind zu ausgewählten Zeitpunkten entstanden, bei denen die erdnächste und erdfernste Bahnposition des Mondes (Perigäum und Apogäum) besonders ausgeprägt waren (die Mondbahn wird stark gestört).

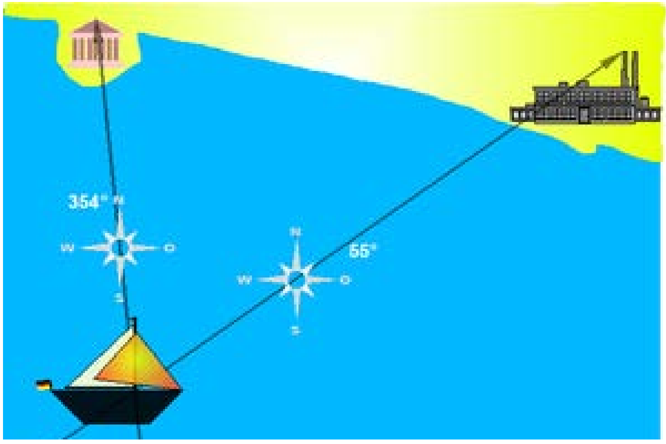
Zur Planung günstiger Zeitpunkte für Mondaufnahmen siehe unter folgender URL:
http://fourmilab.ch/earthview/pacalc.html



Aufgabe: Suche die Zeitpunkte des Vollmondes des Jahres 2010 heraus, ordne diesen entweder das Peri- oder das Apogäum zu und identifiziere die günstigsten Aufnahmetermine. Bei einer weiteren Auswertung (z. B. Abstandsberechnung) sollte nicht allein der Abstand des Mondes zum Erdmittelpunkt in Betracht gezogen werden (Abschätzungen genügen).

Die Marsbahn konstruieren wie Kepler es tat

(→zurück zum Anfang)



©: Rainer Bielefeld, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15379025.

Zur Standortbestimmung auf See gibt es das Verfahren der terrestrischen Navigation, bei dem sich die Position des Schiffs aus dem Schnittpunkt zweier Peillinien zu Landmarken, die in den Seekarten eingezeichnet sind, ergibt.

Johannes Kepler hatte eine ähnliche Idee, um die „Standorte“ des Planeten Mars entlang seiner Bahn Position für Position zu ermitteln und so die Marsbahn zu konstruieren.

In Analogie zur terrestrischen Navigation entspricht das Schiff dem Mars, und die beiden Landmarken zwei verschiedenen Positionen der Erde.

Keplers geniale Idee bestand darin, den Mars jeweils an einem bestimmten Bahnort von zwei verschiedenen Orten auf der Erdbahn anzupeilen. Er suchte sich aus den Beobachtungsdaten von Tycho Brahe jeweils zwei Marspositionen heraus, die am selben Bahnort lagen, d. h. die diesen Bahnort nach einem vollen Umlauf (nach ca. 687 Tagen) wieder erreichen. (Für ganze Umläufe ist das korrekt). Während der Mars zu diesen beiden Zeitpunkten somit die gleiche heliozentrische Länge hatte, war die heliozentrische Länge der Erde (hzLE) auf ihrer zunächst kreisförmig angenommenen Bahn (Radius = 1 AE) verschieden. Die Richtung (Peillinie) von der Erde zum Mars wird für beide Messzeitpunkte jeweils durch die geozentrische Länge (gzLM) beschrieben. Im Schnittpunkt der beiden Peillinien befindet sich dann der Mars.

In dem Buch „Astronomische Probleme und ihre physikalischen Grundlagen“ von Hans Schäfer (Vieweg 1980(2)) finden sich sowohl die Idee wie auch das Zahlenmaterial zu den folgend von Dr. Rainer Sprickmann aufbereiteten Arbeitsaufträgen.

Arbeitsaufträge zur Konstruktion der Marsbahn à la Kepler

(Autor: Dr Rainer Sprickmann, Gymnasium Zitadelle Jülich, Postfach 1206, 52428 Jülich)
http://www.zitadelle.juel.nw.schule.de/faecher/astronomie/marsbahn.htm

1. Erstelle ein kartesisches Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 AE = 5 cm.

2. Zeichne die (nahezu) kreisförmige Erdbahn maßstabsgerecht ein. Die Sonne ist im Ursprung des Koordinatensystems.

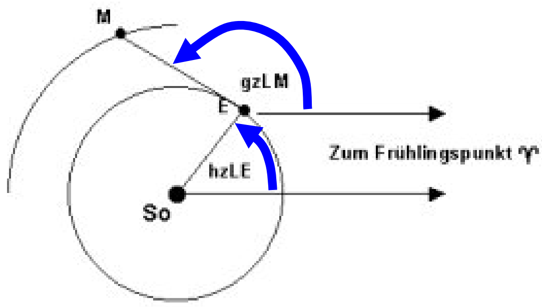
3. Konstruiere nach der Skizze die Marsposition für die Messdaten, die Dir zugewiesen worden sind. Bestimme jeweils auch die kartesischen Koordinaten des Mars und dessen Abstand *r* von der Sonne.

4. Erstelle gemeinsam mit den anderen Gruppen eine Tabelle für alle Positionen (kartesischen Koordinaten) des Mars.

5. Trage mit Hilfe dieser neuen Tabelle alle Marspositionen in Dein Koordinatensystem ein. Welche Eigenschaften der Marsbahn lassen sich jetzt erkennen?

Messwerttabelle

Die in der Tabelle gegebenen Winkel hzLE und gzLM werden wir rechts dargestellt ausgehend von der Richtung zum Frühlingspunkt (Ort der Sonne bei Frühlingsanfang) im Diagramm abgetragen.
(So … Sonne, M … Mars, E … Erde)



Pos	Datum	Heliozentrische Länge der Erde (hzLE) [°]	Geozentrische Länge des Mars (gzLM) [°]	Heliozentrischer kartesischer Marsort		Heliozentrischer Marsabstand
				X [AE]	*Y* [AE]	*r* [AE]
1	01/10/1953 10/04/1961	007,5 200,0	160,0 107,5			
2	01/11/1953 11/05/1961	038,5 230,0	179,0 122,5			
3	01/12/1953 10/06/1961	068,5 258,5	198,5 139,0			
4	01/01/1954 11/07/1961	100,0 288,5	217,0 157,5			
5	01/02/1954 11/08/1961	131,5 318,5	235,5 176,5			
6	17/01/1956 08/09/1961	116,0 345,0	242,0 194,5			
7	01/04/1954 27/08/1963	190,5 334,0	265,5 199,5			
8	01/05/1954 26/09/1963	226,0 002,0	2765,5 219,5			
9	18/04/1956 27/10/1963	208,0 033,0	302,0 241,0			
10	18/05/1956 21/02/1960	237,0 151,5	320,5 298,5			
11	01/08/1954 08/02/1962	308,5 139,0	266,5 305,0			
12	01/09/1954 06/06/1958	338,0 255,0	274,5 358,0			
13	01/10/1954 10/04/1962	007,5 199,5	288,0 352,5			
14	01/11/1954 11/05/1962	038,0 230,0	307,0 016,0			
15	01/12/1954 18/10/1956	068,0 024,0	326,5 343,5			
16	01/01/1955 06/10/1958	101,0 012,5	349,0 062,0			
17	01/02/1955 23/09/1960	131,5 000,0	011,0 091,0			
18	16/01/1957 08/09/9162	115,5 345,0	022,5 100,0			
19	16/02/1957 09/10/1962	147,0 015,5	041,0 118,5			
20	18/03/1957 08/11/1962	177,0 045,0	060,0 133,0			
21	06/03/1959 09/12/1962	164,5 076,5	070,5 144,0			
22	05/04/1959 08/01/1963	194,5 107,0	087,0 144,5			
23	01/08/1955 26/12/1964	308,0 094,5	133,0 172,5			
24	06/06/1959 26/01/1965	254,5 126,0	123,0 178,5			
25	10/04/1963 25/02/1965	199,5 158,0	128,5 173,5			

2. Keplersches Gesetz

(→zurück zum Anfang)

Der Fahrstrahl Sonne-Planet (Radiusvektor) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Ellipsenbahnen auf der Waage

Das 2. Keplersche Gesetz wird auch als Flächensatz bezeichnet. Die Bestimmung einer krummlinig berandeten Fläche ist in der Regel nicht so einfach. Doch man kann sich dabei eines Tricks bedienen, der die Flächenbestimmung auf die Bestimmung der Masse zurückführt. Für gleichmäßig dicke und dichte flächige Materialien (wie z. B. Pappe oder Papier) verhält sich die Masse proportional zur Fläche.

Aufgabe

Bestimme die Zeitdauer, innerhalb derer sich der Halleysche Komet in weniger als 5 AE (5-fache Entfernung Sonne-Erde) Abstand zur Sonne befindet. (Bei einem Abstand von ≤ 5 AE bildet sich der Kometenschweif.) Seine Umlaufzeit T beträgt rund 76 Jahre und 37 Tage.

Arbeitsschritte

- Markiere den Ort der Sonne in einem der Brennpunkte der auf der folgenden Seite maßstäblich abgedruckten **Bahnellipse des Kometen Halley**.

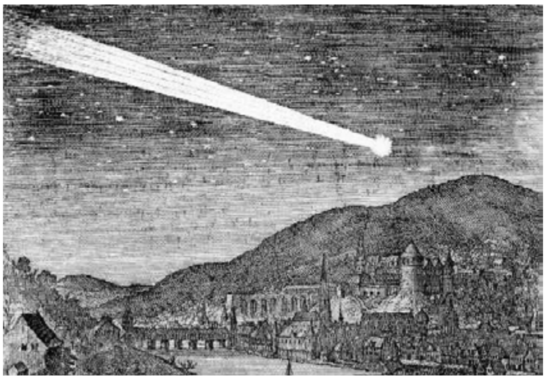
- Beschrifte die Pfeile mit den zugehörigen Ellipsengrößen (siehe auch Folgeseite): ***a*** (große Bahnhalbachse), ***b*** (kleine Bahnhalbachse) und ***e*** (lineare Exzentrizität).

- Bestimme nun den Bahnabschnitt, innerhalb dessen der Komet einen Abstand von ≤ 5 AE im maßstäblichen Bahnmodell hat und mache die 5-AE-Abstände durch Pfeile ersichtlich.
  Dazu musst du zunächst die Länge von 1 AE beim gegebenen Maßstab in cm ermitteln.

- Schneide jetzt die **Bahnellipse des Kometen Halley** aus und klebe diese vollflächig (aber mit wenig Klebstoff) auf Pappe. Schneide die Bahnellipse nun erneut aus.

- Bei einem Abstand von etwa 5 AE beginnt das Material an den Oberflächen von Kometen-kernen zu sublimieren (direkter Übergang des festen Aggregatzustands zum gasförmigen).
  Bestimme die Zeitspanne, innerhalb derer der Kometenkern von Halley einen Sonnenab-stand ≤ 5 AE hat mit Hilfe wie folgt mittels einer Waage.
    - Bestimme die Masse der gesamten Halleybahn (ihrer Kartonfläche) mit einer Genauigkeit von 0,01 g.
    - Schneide nun den Bahnabschnitt aus, innerhalb dessen der Abstand Sonne-Halley kleiner/gleich 5 AE ist, und bestimme seine Masse.
    - Informiere dich über die Umlaufzeit von Halley und nutze nun das Massenverhältnis und dein Wissen über das 2. keplersche Gesetz, um die gesuchte Zeitspanne zu berechnen.

Halleybahn auf der Waage
(und im Computer)



Komet Halley über Heidelberg. ©: Ausschnitt des Kupferstichs aus: Theatrum Europaeum, Band 1. Ausgabe 1635

Komet Halley (1P):
http://www.minorplanetcenter.net/db_search/show_object?utf8=%E2%9C%93&object_id=1P
für die Epoche: 2061-08-04.0

a ≈ 17,74 AE
b ≈ 4,55 AE
e ≈ 17,14 AE
T ≈ 74,7 a

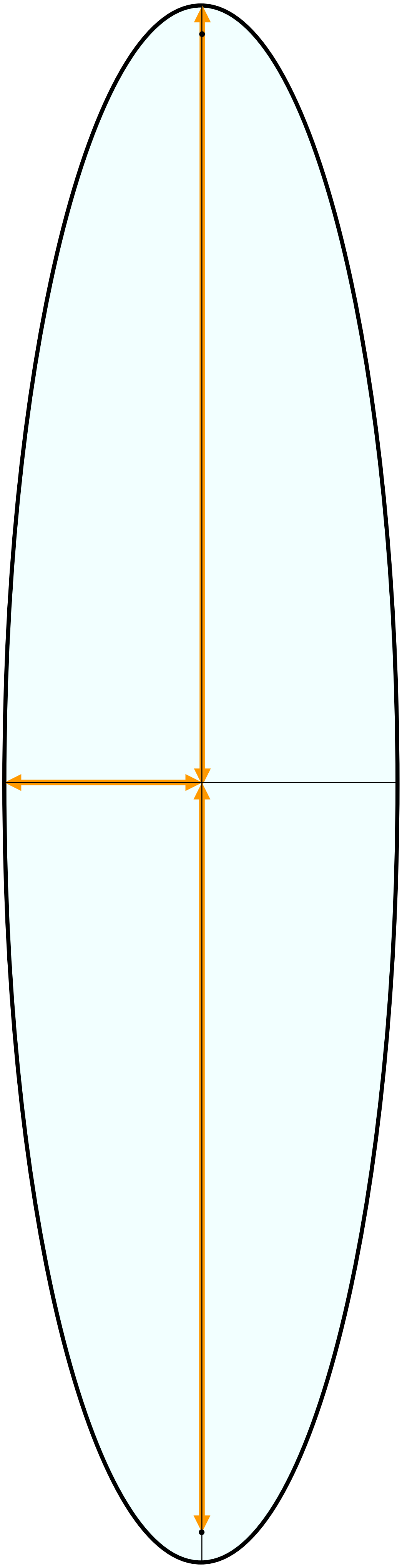
(1 AE: mittlerer Abstand Sonne-Erde)

Zusatzaufgabe
Bestimme den Zeitraum, innerhalb dessen Halley einen Sonnenabstand von kleiner/gleich 5 AE im Zeitraum von 2060 – 2062 erreichen wird, mit Hilfe eines Rechenprogramms (Ephemeriden-Rechner) im Internet (siehe Folgendes) und vergleiche ihn mit deinem „Wägeergebnis“.

Die Internetadresse
http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html
führt dich zum Minor Planet Ephemeris Service.
Dieser Service (ein Programm zur Berechnung der Positionen von Kleinkörpern im Sonnensystem, d. h. von sogenannten Ephemeriden) ermöglicht dir die Kontrolle deines Ergebnisses.

Folgende Eingaben sind zu machen:
- comet Halley oder 1P (ins große Objektfeld)
- 2060/07/01 (ins Feld ‚Ephemeris start date’)
- 1000 (ins Feld ‘Number of dates to output’)
- 1 (ins Feld ‘Ephemeris interval’,
  mit dem Klick bei ‘days’)

Nach Start der Berechnung (get ephemerides/ HTML page) wird eine Tabelle angezeigt, in der uns der Wert von *r*, dem Abstand zur Sonne interessiert.



Die Harmonie der Planetenbahnen – Kepler und die Intervalle

(→zurück zum Anfang)

Das naturwissenschaftliche Denken, wie überhaupt das Denken, ist immer bestimmten Grundsätzen unterworfen. So wichtig es z. B. heute für den Physiker ist, dass Erhaltungssätze ihre Gültigkeit behalten, so wichtig war es damals Kepler, dass die kosmischen Bewegungen, wenn schon nicht kreis- und gleichförmig, so doch harmonisch verlaufen. Kepler bemerkte, dass die Planeten je nach Bahnposition unterschiedliche **Winkelgeschwindigkeiten** besitzen. Die Winkelgeschwindigkeiten schwanken zwischen derjenigen im Perihel (ω_P, maximal) und der im Aphel (ω_A, minimal). Für Kepler war es von großer Bedeutung, dass sich sowohl innerhalb der Planetenbahnen als auch zwischen den Planetenbahnen **Winkelgeschwindigkeitsproportionen** auffinden ließen, die harmonische Verhältnisse (musikalische **Intervalle**) bilden. Die Harmonieidee war dabei wesentlich durch die Musik vorgegeben.

Um die Winkelgeschwindigkeiten berechnen zu können, bestimme man zunächst die Bahngeschwindigkeiten im Perihel (v_P) und im Aphel (v_A). Diese lassen sich aus den Beziehungen zur Energie- und Drehimpulserhaltung herleiten und sehen wie folgt aus:

$$v_P = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{a} \cdot \frac{r_A}{r_P}}, \qquad v_A = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{a} \cdot \frac{r_P}{r_A}}.$$

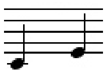
Die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten sind dann $\omega_P = \frac{v_P}{r_P}$ und $\omega_A = \frac{v_A}{r_A}$.

Die **Winkelgeschwindigkeitsproportionen** ergeben sich dann aus

$$\frac{\omega_A}{\omega_P} = \frac{\sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{a} \cdot \frac{r_P}{r_A} \cdot \frac{1}{r_A}}}{\sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{a} \cdot \frac{r_A}{r_P} \cdot \frac{1}{r_P}}} = \left(\frac{r_P}{r_A}\right)^2.$$

Kepler und die Intervalle – eine Schülerübung

Bestimme die Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse für die in der Tabelle gegebenen Planeten und überprüfe, wie gut sie mit den entsprechenden von Kepler genannten musikalischen Intervallen übereinstimmen. Ordne dem Intervall das richtige Notenbild und das passende Hörbeispiel (siehe folgende Auflistung, siehe anhängende didaktische Materialien) zu.


Notenbild-1


Notenbild-2


Notenbild-3

Hörbeispiel-1.ogg Hörbeispiel-2.ogg Hörbeispiel-3.ogg

Planet	Perihel-distanz r_A [AE]	Aphel-distanz r_P [AE]	$\frac{\omega_A}{\omega_P} = \left(\frac{r_P}{r_A}\right)^2$	Musikalisches Intervall			
				Bezeichnung	Frequenz-verhältnis	Notenbild	Hör-beispiel
Mars	1,381	1,666		Quinte	2 : 3		
Jupiter	4,951	5,454		kleine Terz	5 : 6		
Saturn	9,008	10,069		große Terz	4 : 5		

Hörbeispiele aus Wikipedia (Intervall, Musik)

3. Keplersches Gesetz

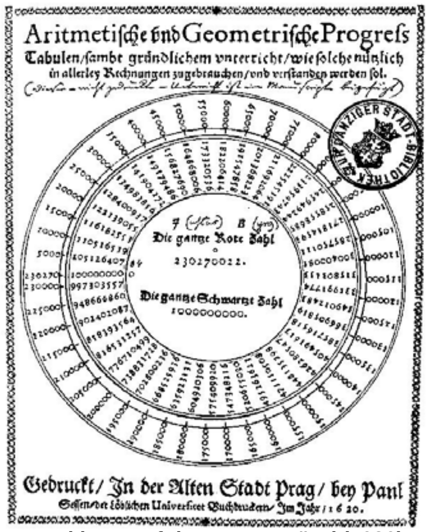
(→zurück zum Anfang)

Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Abstände.

Keplers Mathematik

Kepler drückte sich wie folgt aus:
„Die Proportion zwischen den Umlaufzeiten zweier Planeten ist genau das Anderthalbe der Proportion der mittleren Abstände“ (siehe SuW 12/2009, S. 52, linke Spalte, vorletzter Absatz)
Zu Keplers Zeit findet die Verwendung des **Logarithmus** Verbreitung. Kepler selbst hat diese Schreibweise oft verwendet.
Forme die heutige Schreibweise des 3. Keplerschen Gesetzes so um, dass eine Schreibweise entsteht, die Kepler vermutlich im Sinne hatte, als er die oben genannte Gesetzesformulierung aufschrieb. Im ersten Schritt gilt es beide Seiten zu logarithmieren.

$$\left(\frac{T}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \quad \rightarrow \quad \ldots$$



Aritmetische vnd Geometrische Progreß Tabulen/sambt gründlichem vnterricht/wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/vnd verstanden werden sol.

Die ganze Rote Zahl 230270022.

Die ganze Schwartze Zahl 1000000000.

Gedruckt/ In der Alten Stadt Prag/ bey Paul Sessen/der Löblichen Universitet Buchdruckern/ Im Jahr 1620.

Logarithmentafel von Jost Bürgi (1620), gedruckt in Prag!

Überlege, wie Kepler mit Hilfe der Logarithmen seinen Rechenaufwand verringern konnte. Vergleiche insbesondere den Aufwand zum Dividieren mit dem zum Subtrahieren.

Der nächste Schritt: Vergleich zwischen Planeten- und Jupitermondumläufen

Im Jahre 1619 veröffentlichte Kepler sein Buch „Harmonices Mundi“, in dem er auch die Beziehung beschreibt, welche die Planetenbahnen auch von daher harmonisch erscheinen lässt, weil sie einer gemeinsamen Regel gehorchen, welche wir heute als 3. Keplersches Gesetz bezeichnen.

Hat sich Kepler über das Ergebnis des Ausdrucks T^2/a^3 Gedanken gemacht? Berechne die Werte für diesen Term für die in den folgenden Tabellen angegebenen Orbitobjekte in der Einheit km^2/d^3. Nenne und begründe deine Ergebnisse. Welche weitergehenden Gedanken hast du?

Umlaufverhältnisse Sonne, (1 a = 365,256 d)

Planet	***T*** **[a]**	***a*** **[km]**	$\frac{T^2}{a^3}$ **[km²/d³]**
Merkur	0,2408467	57.909.175	
Venus	0,61519726	108.208.930	
Erde	1	149.597.890	
Mars	1,8808476	227.936.640	

Umlaufverhältnisse Jupiter

Jupitermond	***T*** **[d]**	***a*** **[km]**	$\frac{T^2}{a^3}$ **[km²/d³]**
Io	1,77	421.800	
Europa	3,55	671.100	
Ganymed	7,155	1.070.400	
Kallisto	16,69	1.882.700	

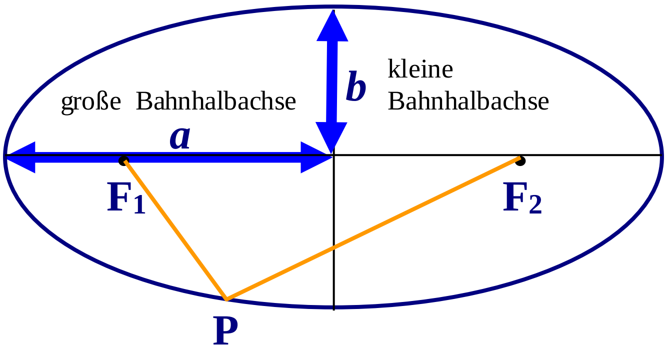
Ergebnisse zu den Aufgaben

Ellipsenkonstruktion als Außenaktion

Bei Verlängerung des Bindfadens (wenn die Länge des Fadens viel größer als der Abstand der Bäume (Brennpunkte) wird) nähern sich die Ellipsen immer mehr einem Kreis an, d. h. sie werden immer weniger exzentrisch.

Frage nach Ellipsendefinition mit Punkten und Abständen

Der Ort und die Lage der Ellipse werden definiert durch den Ort der Brennpunkte F_1 und F_2 und die Orientierung der Geraden, auf der ihre Verbindungslinie liegt. Für die Position eines Kreises ist lediglich der Ort des Mittelpunkts wichtig.



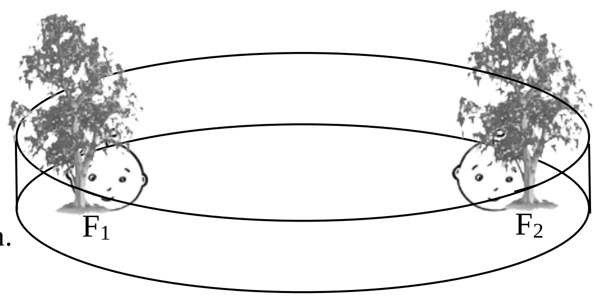
Während für das Aussehen eines Kreises allein der Radius zuständig ist, benötigt man für die eindeutige Beschreibung des Aussehens einer Ellipse zwei Größen: die große Halbachse ***a*** und die kleine Halbachse ***b***.

Für die Ellipse gilt, dass die Summe der Abstände aller Kurvenpunkte zu 2 Punkten (den Brennpunkten) konstant ist:

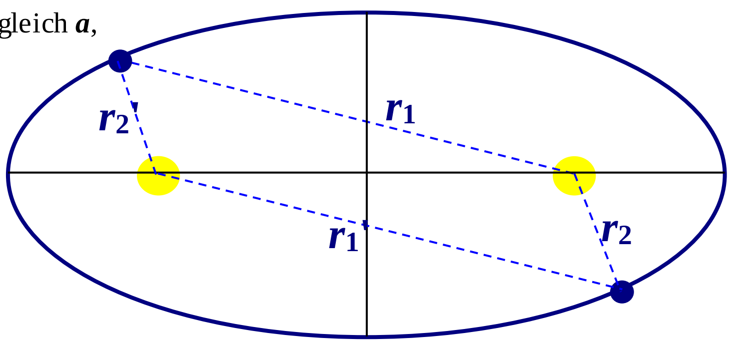
$F_1P + PF_2$ = konstant (= 2*a*).

Die Zentrumsfrage – Information und Fortsetzung der Außenaktion

Der Flüsterbogen funktioniert, wenn sich die Köpfe (Schallquellen, Schallempfänger) in der Nähe der Brennpunkte der Ellipse (bei den Bäumen) befinden.



Die Frage nach den Abständen der Planeten



- Der Mittelwert aus r_P und r_A ist gleich ***a***, denn $r_P + r_A = 2a$.
- Nach der zuvor kennengelernten Ellipsendefinition gilt: $r_1 + r_2' = 2a$ und $r_1' + r_2' = 2a$.
- Entsprechend ist der Mittelwert aller Planetenabstände gleich *a*.
- Wenn man den Mittelwert mit der Aufenthaltszeit wichtet, dann überwiegen die großen Abstände, weil sich der Planet dort länger aufhält (2. Keplersches Gesetz) und der entsprechende mittlere Abstand ist größer als ***a***.

Die Erdbahnellipse beobachten – ein Jahresprojekt

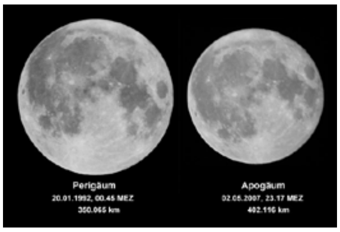
Die Berechnung des Abstands Erde-Sonne kann auf Grundlage von Verhältnissen von Umfang zu Bogenlänge bzw. Vollwinkel zu Teilwinkel erfolgen. Dabei kann ein wahrer Sonnendurchmesser von 1,4 Mio km angenommen werden.
Mit der Kenntnis der heliozentrischen Länge der Erde, die sich aus der geozentrischen Länge der Sonne (siehe Jahrbuch) ergibt (180°-Diffferenz), können dann alle Positionen mit Messwerten in ein Polarkoordinatensystem eingetragen werden Ein Koordinatenpunkt darin ergibt sich aus dem Abstand zum Ursprung und dem Winkel zur x-Achse.
Schließlich muss die Ellipse gefunden werden, die den Verlauf der Bahnpunkte am besten annähert. Die Parameter dieser Ellipse können nun mit Tabellenwerten verglichen werden:

- Numerische Exzentrizität 0,0167
- Perihel 0,983 AE
- Aphel 1,017 AE

Die Datei **Beispiel Durchgangszeit.pdf** enthält ein Beispiel zur Durchgangszeitmessung mit anschließender Berechnung des Winkeldurchmessers der Sonne (samt Fehlerrechnung).

Den schwankenden Monddurchmesser registrieren – auch ein Jahresprojekt

Der unter der Internetadresse http://fourmilab.ch/earthview/pacalc.html nutzbare Vollmond, Peri-/Apogäums-Rechner erbrachte folgende Terminee:



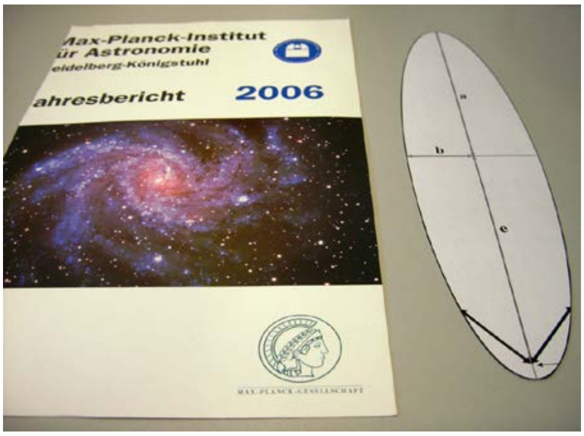
Vollmond: 2010 Jan 30 6:19 → Perigäum: Jan 30 9:04 356592 km
Vollmond: 2010 Feb 28 16:39 → Perigäum: Feb 27 21:41 357831 km
Vollmond: 2010 Mar 30 2:26 → Perigäum: Mar 28 4:57 361876 km
Vollmond: 2010 Apr 28 12:19 → Perigäum: Apr 24 21:00 367141 km
Vollmond: 2010 May 27 23:08 → Perigäum: May 20 8:40 369728 km
Apogäum: Jun 3 16:52 404264 km
Vollmond: 2010 Jun 26 11:31 → Apogäum: Jul 1 10:13 405035 km
Vollmond: 2010 Jul 26 1:38 → Apogäum: Jul 28 23:51 405954 km
Vollmond: 2010 Aug 24 17:06 → Apogäum: Aug 25 5:52 406389 km
Vollmond: 2010 Sep 23 9:19 → Apogäum: Sep 21 8:04 406167 km
Vollmond: 2010 Oct 23 1:38 → Apogäum: Oct 18 18:19 405432
Vollmond: 2010 Nov 21 17:29 → Apogäum: Nov 15 11:48 404633 km
Perigäum: Nov 30 19:10 369438 km
Vollmond: 2010 Dec 21 8:15 → Pergäum: Dec 25 12:25 368462 km

Die günstigen Termine, bei denen der Vollmond nahe (max. 2 Tage Abstand) dem Perigäum oder Apogäum steht, sind unterstrichen.

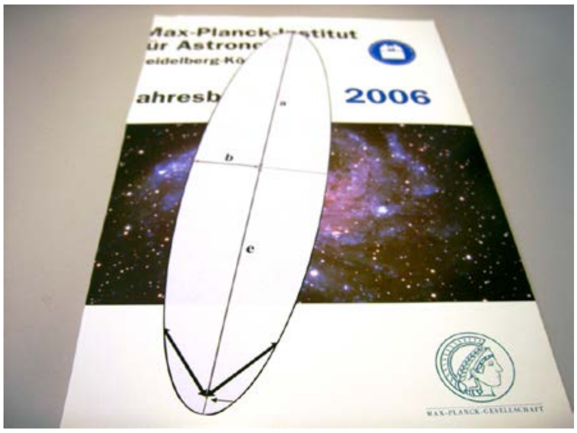
Die Marsbahn konstruieren wie Kepler es tat

Eine von Schülern der 11. Klasse erstellte Lösung zu dieser Aufgabe findet sich in der Datei **Musterlösung-Marsbahn.pdf**.

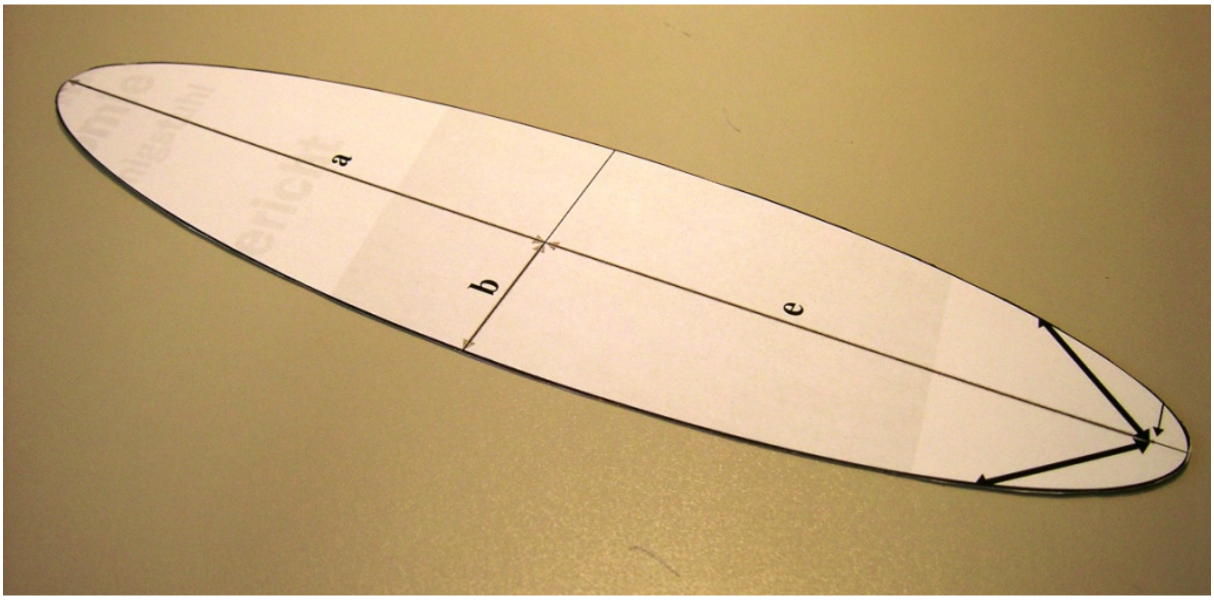
Beispiel-Ergebnisse: Halleybahn auf der Waage (und im Computer)



Ausgeschnittene Kometenbahn mit Markierung des Bahnabschnitts r≤5 AE und mit Beschriftung



Kometenbahn auf Karton aufgeklebt (hier auf Einband eines alten Jahresberichts)



Erneut ausgeschnittene Kometenbahn

Die gesamte Kometenbahn auf Karton wiegt 10,98 g (stellvertretend für die während eines vollständigen Kometenumlaufs vom Leitstrahl Sonne-Komet überstrichene Fläche).

Der Bahnausschnitt, für den Halley einen Sonnenabstand kleiner/gleich 5 AE besitzt hat eine Masse von 0,32 g. Das entspricht etwa dem 34-ten Teil. Bei einer Umlaufzeit von 74,7 a (rund 27284 d) ist Halley also 795 d (ca. 2,2 a) in “Sonnennähe”).

Ergebnisse

Halleybahn
auf der Waage
(und im Computer)

Bestimmung von Bahnabschnitt ≤ 5 AE:

13,45 cm → 17,74 AE (a)
also: 5 AE → 3,8 cm

Bestimmung von Aufenthaltsdauer t ≤ 5 AE:

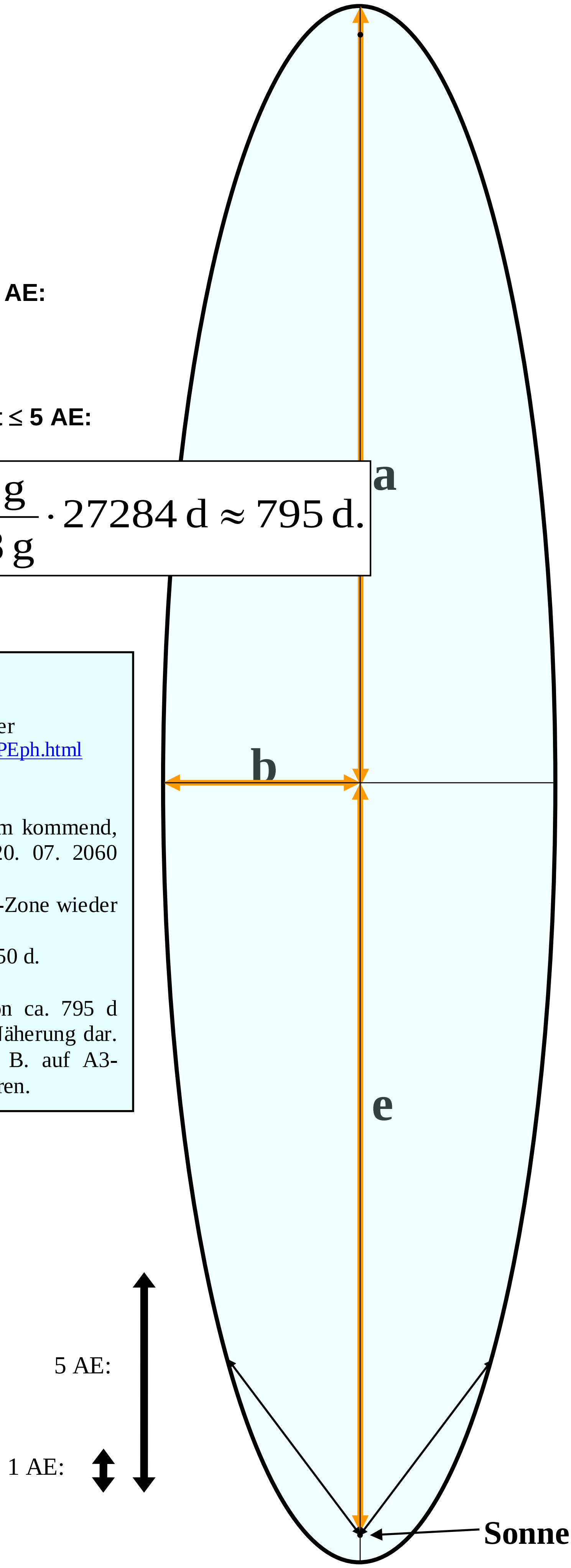
$$\frac{t}{T} = \frac{m}{M} \quad \rightarrow \quad t = \frac{0{,}32\,\mathrm{g}}{10{,}98\,\mathrm{g}} \cdot 27284\,\mathrm{d} \approx 795\,\mathrm{d}.$$

Zusatzaufgabe

Die Nutzung des Ephemeriden-Rechners unter
http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html
brachte folgende Ergebnisse:

Halley wird, aus dem äußeren Sonnensystem kommend, den Sonnenabstand von 5 AE etwa am 20. 07. 2060 erreichen.
Etwa am 09. 09. 2062 wird Halley die 5-AE-Zone wieder verlassen.
Das ergibt eine Aufenthaltsdauer von rund 750 d.

Der im Wägeverfahren ermittelte Wert von ca. 795 d (siehe folgende Seite) stellt also eine erste Näherung dar. Durch Vergrößerung der Kometenbahn z. B. auf A3-Karton ließe sich der Fehler deutlich reduzieren.



Keplers Mathematik

Keplers Aussage:

„Allein es ist ganz sicher und stimmt vollkommen, dass die Proportion, die zwischen den Umlaufzeiten irgendzweier Planeten besteht, genau das Anderthalbe der Proportion der mittleren Abstände, d.h. der Bahnen selber, ist.“

$$\left(\frac{T}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

$$\rightarrow \quad \log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

$$\rightarrow \quad 2\cdot\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = 3\cdot\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$\rightarrow \quad \log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Kepler dachte vermutlich „in Logarithmen“.

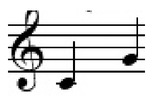
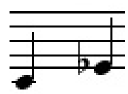
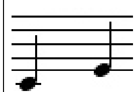
Die Logarithmen erleichtern die Arbeit des Dividierens, indem sie die Division durch eine Subtraktion der jeweiligen Logarithmenwerte ersetzen (Logarithmengesetz):

$$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \log T_1 - \log T_2\,,\quad 1{,}5\cdot\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 1{,}5\cdot\left(\log r_1 - \log r_2\right).$$

Die Logarithmenwerte ließen sich schon damals einer Logarithmentafel entnehmen.

Harmonie in den Planetenbahnen – Kepler und die Intervalle

(Kepler und die Intervalle – eine Schülerübung)

Planet	Perihel-distanz r_A [AE]	Aphel-distanz r_P [AE]	$\frac{\omega_A}{\omega_P} = \left(\frac{r_P}{r_A}\right)^2$	Musikalisches Intervall			
				Bezeichnung	Frequenz-verhältnis	Notenbild	Hör-beispiel
Mars	1,381	1,666	≈ 0,69	Quinte	2 : 3 ≈ 0,67	 Notenbild-3	Hörbeispiel-2.ogg
Jupiter	4,951	5,454	≈ 0,82	kleine Terz	5 : 6 ≈ 0,83	 Notenbild-2	Hörbeispiel-1.ogg
Saturn	9,008	10,069	≈ 0,80	große Terz	4 : 5 = 0,8	 Notenbild-1	Hörbeispiel-3.ogg

Der nächste Schritt: Vergleich zwischen Planeten- und Jupitermondumläufen

Umlaufverhältnisse Sonne, (1 a = 365,256 d)

Planet	***T*** **[a] / [d]**	***a*** **[km]**	$\frac{T^2}{a^3}$ **[d²/km³]**
Merkur	0,2408467 / 87,97	57.909.175	$\approx 3{,}985\cdot 10^{-20}$
Venus	0,61519726 / 224,70	108.208.930	$\approx 3{,}985\cdot 10^{-20}$
Erde	1 / 365,256	149.597.890	$\approx 3{,}985\cdot 10^{-20}$
Mars	1,8808476 / 686,99	227.936.640	$\approx 3{,}985\cdot 10^{-20}$

Umlaufverhältnisse Jupiter

Jupitermond	***T*** **[d]**	***A*** **[km]**	$\frac{T^2}{a^3}$ **[d²/km³]**
Io	1,77	421.800	$\approx 4{,}17\cdot 10^{-17}$
Europa	3,55	671.100	$\approx 4{,}17\cdot 10^{-17}$
Ganymed	7,155	1.070.400	$\approx 4{,}17\cdot 10^{-17}$
Kallisto	16,69	1.882.700	$\approx 4{,}17\cdot 10^{-17}$

Für alle Planeten ergibt sich der (fast) gleiche Wert. Auch für die Jupitermonde erhält man einen (fast) konstanten Wert, der sich jedoch von dem für die Planeten unterscheidet. Es ist nicht geklärt, ob Kepler diese Werte kannte und über ihre Unterschiedlichkeit nachgedacht hat.

Nach 400 Jahren wissen wir es besser. Zunächst gilt es, die Einheiten km^2/d^3 in m^2/s^3 umzuwandeln. Dies geht mit dem Faktor von rund 7,465. Dann multipliziert man die beiden Werte mit der Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ m^3/(kg\ s^2)$, mit dem Ziel, einen Wert mit der Einheit kg zu erhalten. Diesen Wert teilt man noch durch $4\pi^2$ und erhält für die Planeten das Ergebnis von rund $1{,}989\cdot 10^{30}$ kg und für die Jupitermonde rund $1{,}9\cdot 10^{27}$ kg. Diese Werte lassen eine Ahnung aufkommen, die beim Blick in eine Tabelle Gewissheit bekommen – es sind die Massen von Sonne und Jupiter. (Kepler war es wichtig, dass die Sonne im Zentrum der Planetenbahn steht: Zentrumsproblem.)

Anmerkung: Wenn man es ganz genau ausrechnen würde, dann würde man kleine Unterschiede schon bei T^2/a^3 herausbekommen. Diese würden dann auf kleine Unterschiede in den Massen zurückgehen, welche sich schließlich auf die Massen der jeweiligen Orbitobjekte zurückführen ließen (die Masse teilt sich in die Masse des Zentralkörpers (hier Sonne oder Jupiter) und die Masse des jeweiligen Orbitobjekts).