

Die „Gradmessung“ – ein fächerübergreifendes Thema

Oliver Schwarz

In Bezug auf den Beitrag „Die Vermessung der Erde. Der Struve-Meridian“ von Dietrich Lemke in „Sterne und Weltraum“ 6/2011

Der Begriff „Gradmessung“ ist heute etwas aus der Mode gekommen. Die großen Gradmessungen dienten in der Vergangenheit dazu, Aufschluss über den Umfang der Erde und ihre geometrische Gestalt zu erlangen. Letzteres erledigen in heutiger Zeit hochpräzise astrogeodätische Satellitenmessungen. Begriffe und Fachinhalte, die im Alltagsgeschäft des Unterrichts nicht mehr präsent sind, lösen sich leider oft im Nebel des Vergessens auf. Weil man sie nicht mehr kennt, kommt einem auch gar nicht in den Sinn, dass hier ein interessanter Stoff schlummern könnte, der viel Potential birgt. Es lohnt sich aber durchaus, die historischen Gradmessungen in einem projektartigen Schulunterricht aufzugreifen, denn neben astronomischen Inhalten hängt an diesem Thema auch sehr viel Allgemein- und Fachwissen – aus Physik, Geschichte, Geodäsie (durchaus auch Geographie) und Mathematik.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Physik	Mechanik	Erdrotation, Scheinkräfte (Zentrifugalkraft), Abplattung, Breitenvariation der Fallbeschleunigung
Astronomie	Astropraxis (Beobachtungstechnik und -verfahren)	Polhöhenmessung, korrespondierende Sonnenhöhen, Astrogeodäsie
Mathematik	Geometrie	Winkelbeziehungen in Dreiecken, Dreiecksberechnungen, geometrische Beweisverfahren
Geschichte	Entdeckungsgeschichte der Erde	Vermessung der Erde und ihre politischen Konsequenzen

Etwas Geschichte und etwas Astronomie

Warum beschäftigen wir uns mit Astronomie? Die allzu schnelle Antwort auf diese Frage lautet: Damit wir andere Himmelskörper verstehen. Doch tatsächlich war und ist eine wesentliche Motivation für astronomische Untersuchungen auch die Absicht, die Bewegung und die Gestalt der Erde so exakt wie möglich zu studieren. Dazu bedarf es zwingend eines Referenzsystems, das außerhalb der Erde festgelegt ist und auf das man die Messungen beziehen kann. Hierzu wiederum sind astrometrische Untersuchungen nötig – oder anders gesagt: Ohne Astronomie kann man über die Geometrie der Erde nicht viel herausbringen. Lernenden kann dieser auf den ersten Blick verwirrende Zusammenhang anhand des Beispiels der Gradmessungen verdeutlicht werden.

Unter einer Gradmessung versteht man die Bestimmung eines Längen- oder Breitenkreisbogens auf der Erdoberfläche mit der Absicht, die Größe und die Gestalt der Erde zu untersuchen. Den ersten Versuch einer Gradmessung unternahm bekanntlich Eratosthenes (276-195 v. Chr.). Eratosthenes bestimmte die Zenitdistanz der Sonne in Alexandria zu $7^{\circ} 12'$ - und zwar zu einem Zeitpunkt, als im südlich gelegenen Ort Syene die Sonne genau im Zenit stand. Eratosthenes ging davon aus, dass Alexandria und Syene auf dem gleichen Meridian lagen. Aus einer einfachen geometrischen Betrachtung folgt, dass dann der Winkelabstand zwischen beiden Orten bezüglich des Erdmittelpunktes ebenfalls dem Wert von $7^{\circ} 12'$ entspricht, also etwa gleich dem 50. Teil eines Vollkreises ist. Da Eratosthenes die Streckenentfernung zwischen Alexandria und Syene mit 5000 Stadien recht gut bekannt war (1 St = 157,5 m), konnte er den Umfang der Erde zu $50 \cdot 5000 = 250000$ Stadien berechnen. Die meisten Leser werden diese historische Messung und ihren Bezug zum heutigen Schulunterricht aus der Literatur kennen (vergleiche z.B. [1]).

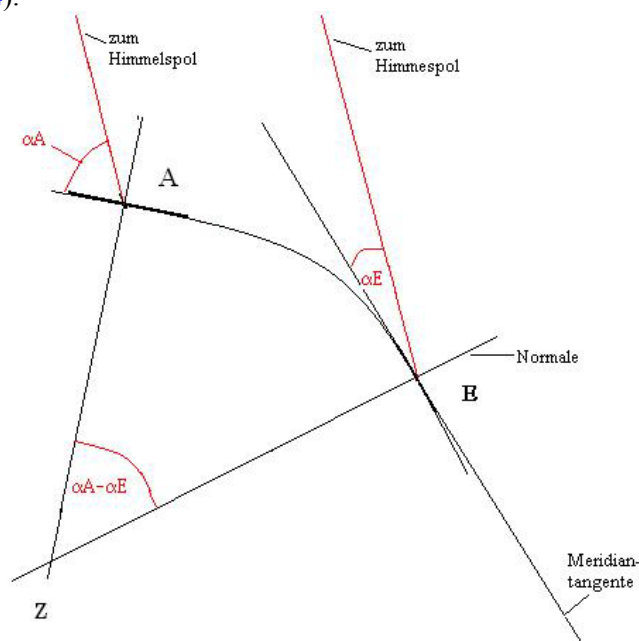
Das Grundprinzip vieler (aber nicht aller!) Gradmessungen findet sich bereits bei Eratosthenes verwirklicht:

Man legt auf einem Meridian einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt E fest, die möglichst weit – also einige Breitengrade - voneinander entfernt sind. Durch astronomische Beobachtungen an diesen beiden Örtern ermittelt man ihren exakten Winkelabstand, bestimmt also die Länge des Bogens von A nach E in einem Winkelmaß. Dies kann z. B. durch die Beobachtung von Sonnenhöhen (**Aufgabe 3**) erfolgen oder durch eine nächtliche Höhenmessung des Himmelsnordpoles (Polhöhenmessung **Aufgabe 2**). Die Höhe des Himmelspols über dem Horizont entspricht exakt der geographischen Breite des Beobachters (siehe **Aufgabe 1**). Die Breitendifferenz in Winkelmaß ist dann gleich dem Winkelabstand beider Örtter bezüglich des Erdmittelpunktes (der kugelförmig gedachten Erdkugel). Anschließend muss die Länge des Meridianbogens auf der Erdoberfläche in einem Längenmaß (also z. B. in der Einheit Meter) ermittelt werden. Dazu sind geodätische Messungen notwendig. Diese geodätischen Messungen sind es, die Gradmessungen zumeist langwierig und beschwerlich machen und die Ausrüstung und Entsendung ganzer Expeditionen erfordern. Dietrich Lemke hat dies in seinem Artikel ausführlich beschrieben.

Wieso funktioniert eine Längengradmessung?

Eratosthenes hatte die Erde noch als kugelförmig angesehen. Am Ende des 17. Jahrhunderts vertraten Newton und Huygens die Ansicht, die Erde müsse wie ein Rotationsellipsoid geformt und deshalb an den Polen abgeplattet sein. In Frankreich unternahm man daraufhin Anstrengungen, die Abplattung der Erde näher zu untersuchen. Das ist möglich, weil die Messresultate einer Gradmessung auch Hinweise auf die Abplattung der Erde enthalten. Dies kann man auf folgende Weise erkennen:

Die nachfolgende Abbildung zeigt einen kleinen Ausschnitt aus einem Meridian, der nicht zwangsläufig die Form eines Kreisbogens besitzen muss, sondern ebenso gut elliptisch geformt sein kann. An den Punkten A und E sind die Tangente und die Normale der Meridianlinie eingezeichnet. In A und E seien die Polhöhen – also die Winkel σ_A und σ_E – bekannt. Doch ist der Breitenunterschied beider Örtter tatsächlich auch dann der Winkel $\sigma_A - \sigma_E$, wenn die gekrümmte Meridianlinie kein Kreisausschnitt ist? Ja, und man kann diesen Zusammenhang durch geometrische Überlegungen leicht nachvollziehen (**Aufgabe 4**).



Die Polhöhenmessungen in A und E liefern den Winkelabstand dieser beiden Punkte auf der Meridianlinie.

Fazit: Durch astronomische Messungen kann man sowohl auf einem kreisförmigen, als auch auf einem elliptischen Meridianbogen den Winkelabstand von A und E (die Breitendifferenz) bestimmen.

Doch was passiert bei den geodätischen Streckenmessungen? Diese Frage beantwortet *Dietrich Lemke* in seinem Hauptbeitrag: Man entsendet je zwei Expeditionen, um am Äquator und in Polnähe der Erde eine Gradmessung durchzuführen. Man hat sich darauf geeinigt, an beiden Orten die Länge eines Meridianbogens zu messen, z. B. eine Breitendifferenz von 1° . Auf einer kugelförmigen Erde würden beide Längen übereinstimmen. Auf der abgeplatteten Erde muss man in der Nähe des Pols eine größere Strecke zurücklegen als am Äquator.

Aufgaben

Im Zeitalter des Internets sollte folgende Aufgabenstellung praktisch kein Problem darstellen: Man suche eine kooperierende Schule, die etwa auf dem gleichen Längengrad wie die Heimatschule liegt. (Diese Voraussetzung ist nicht zwingend, sie steht lediglich im Zusammenhang zum Thema „Längengradmessung“.) Mit Hilfe von unabhängigen Beobachtungen, kann man den Breitenunterschied beider Schulen bestimmen. Für die Aufgabe 3 wäre eine einfachere Variante, durch Messung der Höhe der Sonnenkulmination unmittelbar die Breitendifferenz der Schulen zu bestimmen. Dazu muss – die Sonne ändert ihre Mittagshöhe ja von Tag zu Tag – eine Terminfestlegung für die Beobachtung an beiden Schulen erfolgen. Die Beobachtung selbst könnte auch mit einem Schattenstab geschehen (Methode der kürzesten Schattenlänge), vgl. [1]. Für die anderen Beobachtungen in beiden Schulen ist im Grunde keine exakte Zeitabsprache aus astronomischen Gründen erforderlich, aus didaktischen Gründen (Motivation) sollte man aber dennoch möglichst gleichzeitig beobachten, um eine zeitnahe Auswertung durchzuführen.

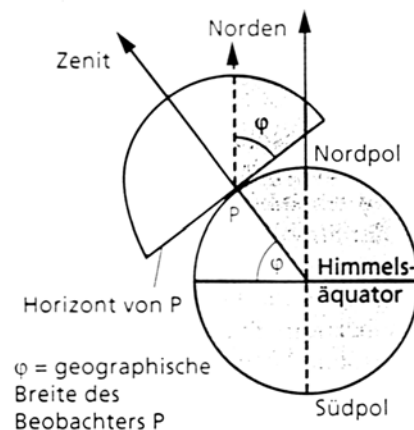
Schließlich: Steht eine Klassenfahrt zu einem weiter entfernten Ziel ins Haus, dann kann man die Messung auch ohne Kooperationspartner durchführen.

Als Messmittel wird wohl ein einfaches Fernrohr dienen, vorausgesetzt die Montierung ermöglicht das Ablesen von Höhenwinkeln mit einem Fehler von nicht mehr als $0,2^\circ$. Damit das Projekt nicht im Messfehler untergeht, sollten beide Schulen mindestens $2\text{-}3^\circ$ Breitenunterschied aufweisen...

Aufgabe 1

Beweisen Sie den Satz: Die Höhe des Himmelpols über dem Horizont entspricht der geographischen Breite des Beobachters.

Lösung: Am einfachsten nutzt man den geometrischen Satz, nachdem paarweise senkrecht aufeinander stehende Winkelschenkel den gleichen Winkel einschließen. Wo sind diese paarweise senkrecht aufeinander stehenden Schenkel in der Abbildung zu sehen?



Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Polhöhe für den Ort Ihrer Schule durch Sternbeobachtungen und ermitteln Sie den Breitenunterschied zu einer weiteren Schule, die ihre Polhöhenmessung mitgeteilt hat.

Lösung: Diese Aufgabe erfordert ein horizontal aufgestelltes Fernrohr mit ablesbarem Höhenwinkel und ein Okular mit Fadenkreuz. Man stellt das Fernrohr anhand des Polarsterns etwa in Nord-Südrichtung auf und beobachtet (im Winterhalbjahr) die obere und die untere Kulmination eines Sterns in Polnähe (Man wähle ein „schülerfreundliches“ *polnahes* Objekt, nicht mehr als 10° vom Himmelspol entfernt, mit Hilfe der drehbaren Sternkarte, bei dem diese Kulminationen vor Schulbeginn und am frühen Abend erfolgen.). Man verfolgt dazu die scheinbare tägliche Bahn des Gestirns über dem Nordhorizont mit dem Fadenkreuzokular und bestimmt die maximale Höhe α und die minimale Höhe β des Gestirns über dem Horizont. Der Mittelwert beider Höhenangaben ist die Polhöhe: $(\alpha + \beta) / 2 = \varphi$. Eine graphische Auswertung erleichtert die Messung, indem man die fortlaufende Beobachtungszeit und die gemessenen Höhenwerte auf Millimeterpapier einträgt und so den wahren Kulminationszeitpunkt gut durch Interpolation festlegen kann.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die geographische Breite Ihrer Schule durch Messung der Mittagshöhe der Sonne.

Lösung: Auch hier wird ein horizontal aufgestelltes Fernrohr mit schwacher Vergrößerung benötigt – zusätzlich ein Fadenkreuzokular und ein Sonnenfilter. Etwa 0,5 Stunden vor der wahren Mittagszeit am Ort beginnt man mit sogenannten korrespondierenden Beobachtungen, d. h. man notiert jede Minute die Sonnenhöhe. Zunächst wird die Sonnenhöhe zunehmen, dann - nach der Kulmination unseres Zentralgestirns – wieder abnehmen. Auf Millimeterpapier trägt man in einem Diagramm die Sonnenhöhe über der Zeit ein. Den eigentlichen Kulminationszeitpunkt wird man nur zufällig beobachten – aus dem Diagramm kann man ihn und die dabei erreichte Sonnenhöhe aber gut graphisch interpolieren. Die praktische Messung erfolgt so, dass man immer z. B. den unteren Rand der Sonne beobachtet und den halben Winkeldurchmesser der Sonne zur Höhe hinzu zählt. Den Zusammenhang zwischen Sonnenhöhe h und geographischer Breite φ des Beobachters liefert die folgende Gleichung:

$$h = 90^\circ - \varphi \pm \delta.$$

Die Deklination δ muss tagesaktuell eingesetzt werden (z. B. zu entnehmen aus Sternkalendern).

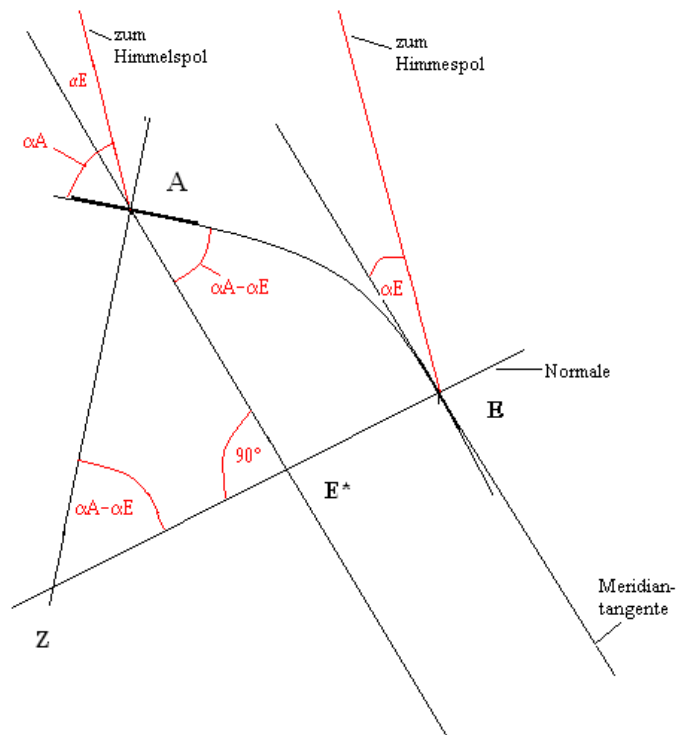
Man verdeutliche den Lernenden die Gleichung anhand einfacher Beispiele, auch unter Zuhilfenahme von Modellen (Erd- und Himmelsglobus), etwa: Zu Frühlingsbeginn steht die Sonne auf dem Himmelsäquator. Dieser erhebt sich um den Winkel $90^\circ - \varphi$ über dem Südhorizont, wobei φ die geographische Breite des Beobachters ist. Aus der Beobachtung der Kulminationshöhe der Sonne folgt unmittelbar für diesen Tag die geographische Breite φ .

Hinweise: Die Aufgaben 2 und 3 können – je nach Altersstufe – beliebig vertieft werden. Die hier vorgestellten prinzipiellen Lösungen lassen sich z.B. durch Beachtung der atmosphärischen Refraktion oder der Zeitgleichung bei der Ermittlung der Uhrzeit für den Sonnenhöchststand weiter verfeinern. Für die Refraktion gilt: Bei Objekthöhen größer als 30° ist der Refraktionsfehler kleiner als $0,03^\circ$. Bei einem einfachen Schulteleskop als Messmittel spielen diese Verfeinerungen aber für den Messfehler (wohl in der Größenordnung von $0,2-0,3^\circ$) keine bedeutende Rolle. Dank GPS-Empfänger kann man die Schülerergebnisse für die Breitenbestimmung schnell prüfen.

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass die Bestimmung des Breitenunterschiedes zweier Orte durch Polhöhenmessung (vgl. Aufgabe 1) nicht nur auf einer Kugel, sondern auch auf einem Ellipsoid funktioniert.

Lösung: In der Abbildung wurden die wesentlichen Hilfslinien und Winkel bereits eingezeichnet: Man muss die Meridiantangente durch E parallel nach A verschieben. Die Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck AZE^* und die Scheitelwinkel bei A sind der Schlüssel zum Beweis (σE : Polhöhe in E, σA : Polhöhe in A, $\sigma A - \sigma E$: Polhöhen und Breitenunterschied von A und E (wie der Beweis eben zeigt)).



Klassenausflüge, Wanderungen und Projekttag: Geschichte der Gradmessung in Deutschland

Beschäftigen wir uns noch etwas mit der Geschichte der Gradmessung: Die Gradmessstationen Struves lagen im heutigen Moldawien, der Ukraine, Weißrussland, Litauen usw. Das liegt leider nicht für einen Klassenausflug oder die Klassenfahrt gleich um die Ecke. *Dietrich Lemke* erwähnt in seinem Artikel Bernhard August von Lindenau, der Struve einst zur Durchführung der Gradmessung aufgefordert hat. Das kam nicht von ungefähr, denn Lindenau war selbst in einige Vorläufergradmessungen involviert. Es handelt sich dabei um die Gradmessungen von Zach und Müffling (letztere eine Längengradmessung) sowie um die berühmte Gradmessung von Gauß. Der Vorteil dieser Messungen: Sie fanden im Wesentlichen in Deutschland statt, sodass ihre steinernen Zeitzeugen für Schulklassen relativ leicht zugänglich sind.

Die folgende Kurzdarstellung kann man als Lesetext nutzen:

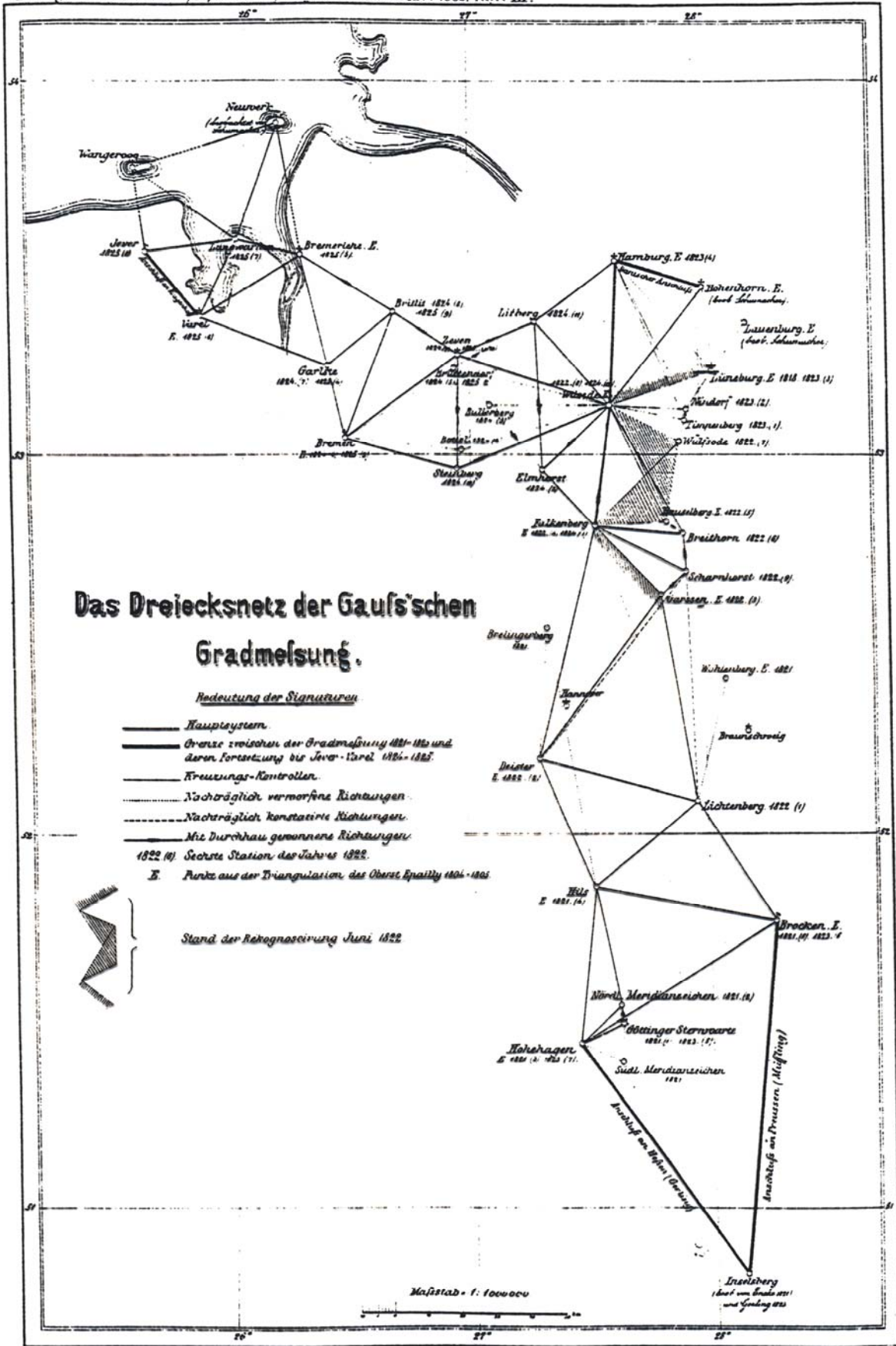
Im Jahre 1802 wandte sich der König von Preußen an den damaligen Direktor der Sternwarte in Gotha (Thüringen) Franz Xaver von Zach (1754-1832), mit der Bitte, das Eichsfeld (ein Gebiet nördlich von Thüringen) und die Gebiete um die Stadt Erfurt geodätisch zu erfassen sowie eine militärische Karte von ganz Thüringen anzufertigen. Zach erfasste sofort, dass sich ihm nun eine günstige Gelegenheit bot, unter Einbeziehung der preußischen Vermessungskräfte eine geodätische Kampagne zu starten, die sich über mehrere Längen- und Breitengrade hinweg erstrecken sollte. Mit einer solchen Gradmessung konnte man die Abplattung des Erdkörpers und die lokale Gestalt der Erdoberfläche bestimmen, also Fragen klären, die wesentlich weiter reichten, als die Erstellung einer topographischen Karte...

Zach begeisterte seinen Landesherrn Ernst II. von Sachsen-Gotha-Altenburg. Zunächst musste Ernst II. auf diplomatischem Weg dafür sorgen, dass Zach und seine Helfer alle benachbarten Länder betreten und triangulieren durften. Die Genehmigungen hierfür konnte man ohne nennenswerte Schwierigkeiten erlangen. Parallel zu diesen organisatorischen Vorbereitungen bemühte sich Zach, ein möglichst effektives Vermessungsverfahren für das gewaltige Projekt zu entwickeln. Zach kam auf die Idee, Pulverblitzsignale zur Übertragung der Ortszeit zu nutzen. Pulverblitze sind weithin zu sehen und der Astronom hoffte, auf diese Weise schnell ein ausgedehntes Festpunktnetz im später exakt zu triangulierenden Gebiet zu erhalten. Im Jahre 1803 wurden von verschiedenen Bergen Blitzsignale gegeben und ausgewertet. Alsdann begann man mit der Auslegung einer geodätischen Basis.

Unter einer solchen Basis versteht man eine mit höchstmöglicher Genauigkeit bestimmte Streckenlänge auf der Erdoberfläche, deren Kenntnis unerlässlich ist, wenn man aus den bei der Vermessung bestimmten Winkeln durch Dreiecksberechnungen wahre Distanzen ermitteln will. Zach plante diese Basis in zwei Teilschritten – ausgehend vom Hauptinstrument seiner Sternwarte – in Nord-Süd-Richtung auszulegen. Durch Aneinanderlegen von eisernen Messstangen bestimmte man mit hoher Genauigkeit die Distanz vom Sternwartenfernrohr zum südlichen Basisendpunkt. Dabei wirkten neben Zach auch der preußische Offizier Karl Freiherr von Müffling (1775–1851), der spätere Nachfolger Zachs als Sternwartendirektor Bernhard August von Lindenau (1780–1854) und der in Gotha weilende Astronom Johann Tobias Bürg (1766–1834) mit. Mitten in diesen Arbeiten verstarb überraschend im Jahre 1804 Ernst II. Trotz dieses Verlustes gingen die Vermessungsarbeiten zunächst weiter.

Mit der aufkommenden Kriegsgefahr zwischen Frankreich und Preußen wurde 1805 die preußische Armee mobilisiert und Zach verlor die vom König gestellten soldatischen Hilfskräfte. Auch jetzt bemühte sich Zach noch um die Fortsetzung der Basisbestimmung. Als im Jahre 1806 der Krieg ausbrach, mussten die Arbeiten endgültig eingestellt werden.

Lindenau nutzte dann die von Zach bestimmte Basislänge um im Jahre 1808 einige Gebiete Thüringens zu vermessen. Nach den Befreiungskriegen kehrte auch Müffling wieder an die Sternwarte bei Gotha auf den Seeberg zurück. Er plante eine Gradmessung von Dünkirchen zum Seeberg, die er im Jahre 1818 ausführte. Das Messresultat ergab damals: Die Abplattung der Erde beträgt 1:310. Im Jahre 1820 nutzte schließlich auch der berühmte Mathematiker Karl Friedrich Gauß die von Zach bestimmte Basislänge. Im Jahre 1820 band er sie in seine berühmte Gradmessung ein, die sich von Thüringen über Göttingen (und natürlich die dortige Sternwarte) an die Nordsee erstreckte.



Einige Messpunkte der Gaußschen Gradmessung kann man durchaus auf Exkursionen besuchen, vgl. Aufgabe 5, siehe weiter unten.

Fächerübergreifende Aufgaben:

1. Erläutern Sie den im Text genutzten Begriff der geodätischen Basis.
2. Bereiten Sie Kurzreferate über die Forscher Zach, Lindenau, Müffling und Gauß vor. In welcher Zeit lebten Sie, welche Verbindungen zu Struve gab es?
3. Im Text wird von verschiedenen Kriegen zwischen Preußen und Frankreich gesprochen. Welche Kriege waren das? (*Schlacht bei Jena und Auerstedt, Preußen verliert seine Unabhängigkeit 1806, Befreiungskriege ab 1812/13*)
4. Wie groß ist der heute gebräuchliche Wert für die Erdabplattung? Wie berechnet man die Abplattung der Erde, wie ist dieser Wert definiert? (*heutiger Wert: 1:298*)
5. Rekonstruierte, wiederaufgefundene oder erhalten gebliebene Vermessungspunkte der Gaußschen Gradmessung kann man unter <http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ign/gauss/vermess.htm> einsehen - allerdings muss man etwas die Literatur studieren...
Recherchieren Sie den historischen Ablauf dieser Gradmessung.
6. Durch welche Kraft entsteht die Erdabplattung hauptsächlich? (*Zentrifugalkraft*)

Literatur:

- [1] U. Backhaus, Die Entfernung des Mondes und die Gestalt der Erde – Zwei internationale Beobachtungsprojekte im Rahmen des Jahres der Astronomie. In: CD zur Frühjahrstagung des Fachverbandes Didaktik der Physik in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Physikertagung Bochum 2009
Die Ergebnisse zum Beitrag [1] sind in einem weiteren Beitrag erschienen: verfügbar unter: <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/IYA2009/IYA2009-Sonnenposition.html>
- [2] P. Brosche, Astronomie der Goethezeit, Harri Deutsch, Frankfurt Main, 2. Aufl. 1998.
- [3] O. Schwarz, Zach as surveyor of Thuringia, In: L. G. Baláz et. al. (Hrsg.) The European Scientist, Symposium on the era and work of Franz Xaver von Zach (1754-1832), held in Budapest on September 15-17, 2004, S.104-112.
- [4] O. Schwarz, Wo einst das Fernrohr stand: Der geodätische Nabel Thüringens und ein bedeutender Bezugspunkt zur Bestimmung der Erdgestalt, In: Gothaisches Museums-Jahrbuch, hain-Verlag, Rudolstadt, 2000.