

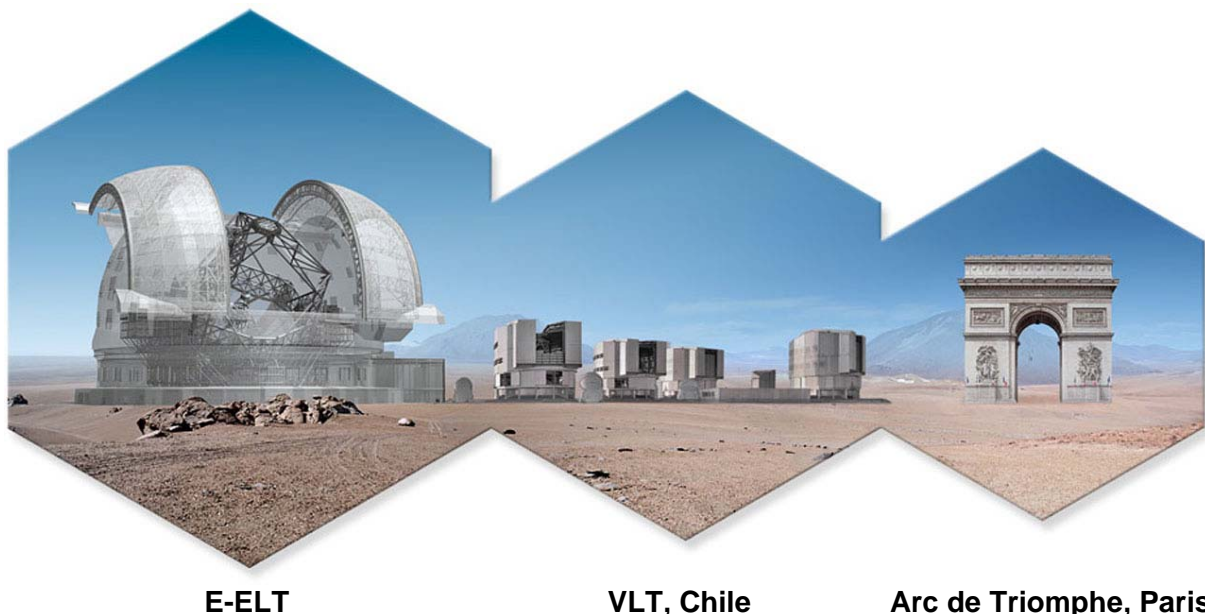
## Von der Beugung zur Abbildung - Was leisten Teleskope?

In Bezug auf den SuW-Beitrag „Eine Frage der Ehre“ in Heft 8/2011, S. 44

Monika Maintz

Welche Eigenschaften bestimmen die Leistungsfähigkeit von Teleskopen? Warum kann man Punkte nicht scharf abbilden? Wie beeinflusst die Beugung optische Abbildungen? Und was hat das alles mit der Auflösung zu tun? Diesen und damit verknüpften Fragestellungen geht der WIS-Artikel nach. Zuerst wird das Phänomen der Beugung ausführlich dargestellt. Ausgehend vom Huygensschen Prinzip wird erklärt, warum Beugung am Spalt und an kreisförmigen Öffnungen entsteht. Dann wird beschrieben, wie Beugungsminima und -maxima zustande kommen. Dies dient als Grundlage, um im Folgenden zu verstehen, was es mit dem Auflösungsvermögen auf sich hat. Im Anschluss werden weitere für Teleskope relevante Begriffe wie Lichtstärke, Öffnungsverhältnis und Vergrößerung erörtert. Den Abschluss bilden eine Reihe von Aufgaben, die zum größten Teil darauf abzielen, das vorher Erfahrene anzuwenden. Die Schüler sollen üben, Formeln zu „lesen“ und anhand von Gleichungen Aussagen über physikalische Sachverhalte zu treffen.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	Astropraxis	Teleskop, Leistungsfähigkeit von Teleskopen, Auflösungsvermögen, Lichtstärke, Öffnungsverhältnis, Vergrößerung
Physik	Optik	Optische Abbildung, Huygenssches Prinzip, Elementarwellen, Interferenz, Beugung am Spalt, Beugung an kreisförmigen Öffnungen, Beugungsfiguren, Beugungsmaxima, Beugungsminima
Lehre allgemein	Kompetenzen (Wissen, Erkenntnis)	Komplexe Zusammenhänge verstehen, Berechnungen und Vergleiche durchführen



**E-ELT**

**VLT, Chile**

**Arc de Triomphe, Paris**

**Abbildung 1:** Künstlerische Darstellung des European Extremely Large Telescope (E-ELT) im Vergleich zum Very Large Telescope (VLT) mit seinen vier 8m-Spiegeln und dem Arc de Triomphe in Paris. Zu Beginn der 2020er Jahre soll das E-ELT in Betrieb gehen. Mit einem Spiegeldurchmesser von knapp 40 m wird es alle bisherigen optischen Teleskope in den Schatten stellen und sogar um einiges schärfer sehen als das Weltraumteleskop Hubble. Damit erfüllt es die Voraussetzungen, um unsere Sicht auf astronomische Sachverhalte zu revolutionieren. (Bild: ESO)

## 1. Optische Abbildung

Selbstleuchtende Objekte wie Glühlampen oder Sterne strahlen (sichtbares) Licht ab. Objekte wie z. B. Lebewesen, Gegenstände, Wasseroberflächen oder Wolken, die nicht selbst leuchten, reflektieren dieses Licht, wenn sie angestrahlt werden. Wenn abgestrahltes oder reflektiertes Licht ein sehr kleines Loch oder eine Sammellinse durchquert und anschließend z. B. von einem Schirm, einer Kamera oder einem Auge aufgefangen wird, entsteht dort eine Abbildung des Objekts. Die einfachste Form einer optischen Abbildung lässt sich mit Hilfe einer Lochkamera (Camera obscura) realisieren (siehe Abschnitt „Weiterführende Literatur“).

Wie gut eine Abbildung ist, hängt von dem verwendeten abbildenden System ab (Loch, Einzellinse, Linsensystem). Scharfe Abbildungen erhält man nur mit Linsen oder Linsensystemen (z. B. Objektive von Kameras oder Teleskopen), da nur diese die auftreffenden Lichtstrahlen in einem Brennpunkt bzw. einer Brennebene bündeln. Die Entfernung des Brennpunkts oder der Brennebene von der Linse bzw. vom Linsensystem bezeichnet man als Brennweite der Linse bzw. des Linsensystems. Die in der Brennebene entstehenden Bilder kann man entweder direkt mit einer Kamera aufnehmen oder mit einer Okularlinse vergrößern und mit dem Auge betrachten. Nach letzterem Prinzip funktioniert die direkte Beobachtung von Objekten mit dem Auge am Teleskop.

## 2. Beugung

Ein Problem, mit dem man bei optischen Abbildungen grundsätzlich konfrontiert wird, und das man immer berücksichtigen muss, ist das Phänomen der Beugung. Diese ermöglicht, dass Wellen an Hindernissen auch in deren Schattenbereich gelenkt werden. Die Beugung lässt sich durch das *huygenssche Prinzip* erklären, das für alle Arten von Wellenerscheinungen gleichermaßen gilt (siehe Abschnitt „Weiterführende Literatur“). Als beugende Elemente wirken die Ränder der Hindernisse oder Öffnungen wie Spalt- oder Objektivränder von optischen Geräten. Die Richtungsänderung der Wellen und ihre damit einhergehende unterschiedliche Ausbreitung führt zu Interferenzerscheinungen: Die Wellen überlagern sich und verstärken sich an bestimmten Orten, an anderen Orten schwächen sie sich oder löschen sich sogar völlig aus.

## 3. Beugung am Spalt

Beugung lässt sich sehr gut beobachten, wenn man einfarbiges (monochromatisches) Licht durch einen sehr schmalen Spalt fallen lässt und anschließend in einiger Entfernung vom Spalt auf einem Projektionsschirm auffängt. Die Spaltränder bewirken die Änderung der Ausbreitungsrichtung des Lichts und die damit einhergehende Überlagerung der Lichtwellen. Auf dem Schirm entsteht ein Interferenzmuster aus sich abwechselnden hellen und dunklen Streifen (Abb. 2). Diese Streifen stellen Bereiche dar, die von der Lichtquelle infolge der Interferenz unterschiedlich stark beleuchtet werden. (Als Lichtquelle fungiert in diesem Beispiel der Spalt.) Der größte Teil des Lichts fällt in die Mitte des Beugungsbildes auf einen sehr hellen breiten Streifen. Da die Lichtintensität in diesem Bereich am größten ist, befindet sich hier das Hauptmaximum oder Beugungsmaximum nullter Ordnung der Beugungsfigur. Daran schließen sich auf beiden Seiten dunkle Streifen an, die Beugungsminima oder kurz Minima 1. Ordnung. Dies sind Bereiche, in die durch die gegenseitige Auslöschung der Wellen kein Licht fällt und die daher dunkel erscheinen. Den Beugungsminima 1. Ordnung folgen auf beiden Seiten wieder helle Streifen, die ersten Nebenmaxima oder Beugungsmaximum 1. Ordnung. Dann kommen beidseitig wieder Minima, die Beugungsminima 2. Ordnung, anschließend wieder Maxima, die Beugungsmaxima 2. Ordnung, daran schließen sich wieder Minima an, die Beugungsminima 3. Ordnung, usw. Dabei nimmt die Helligkeit der schmalen Nebenmaxima mit zunehmender Entfernung vom Hauptmaximum sehr schnell ab.

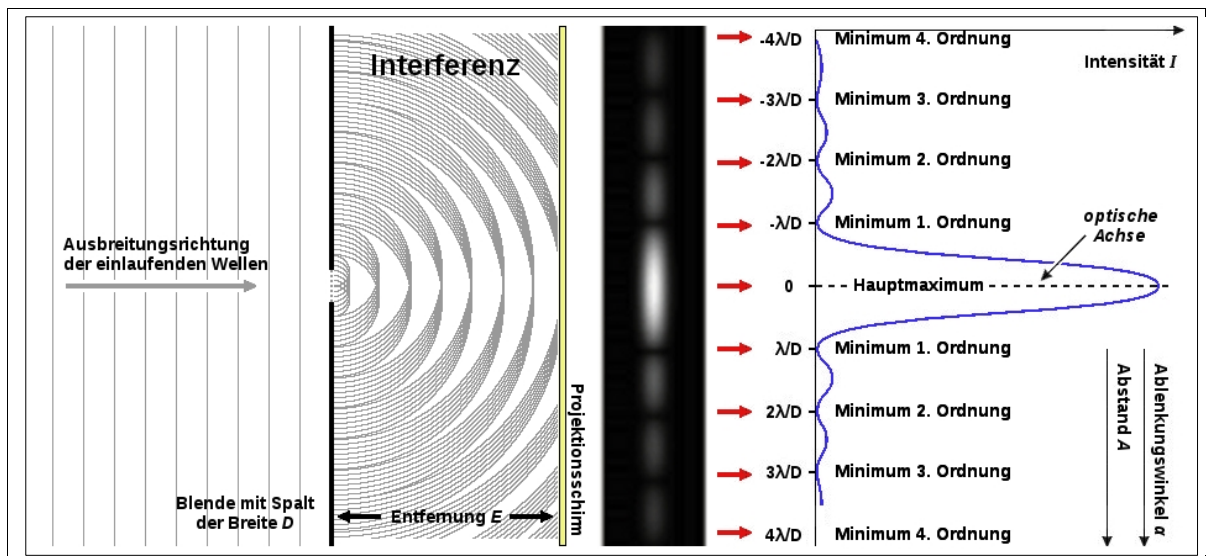


Abbildung 2: Beugung von Lichtwellen beim Durchgang durch einen Spalt: Die von links einlaufenden geraden Wellenfronten treffen auf ein Hindernis (Blende mit schmalen Spalt). Ein Teil der Wellenfronten kann den Spalt passieren. Dem Huygensschen Prinzip zufolge stellt jeder Punkt einer Wellenfront das Wellenzentrum einer Elementarwelle dar, die sich in Form einer Kreis- bzw. Kugelwelle ausbreitet (dies hängt davon ab, ob man das Wellenphänomen im 2- oder 3-Dimensionalen betrachtet). Folglich geht von jedem Punkt einer Wellenfront, die den Spalt durchquert, eine Kreiswelle aus. Diese überlagern sich zu einem Interferenzmuster. (Da nur im Spalt Kreiswellen entstehen, links und rechts davon aber Kreiswellen „fehlen“, können sich keine geraden Wellenfronten ausbilden.) Das Interferenzmuster, das auf einem Projektionsschirm aufgefangen wird, besteht aus sich abwechselnden hellen (Beugungsmaxima) und dunklen (Beugungsminima) Streifen. Die Lichtintensität dieser Maxima und Minima ist rechts dargestellt. Ihre Lage bezogen auf das Hauptmaximum (Maximum nullter Ordnung) wird vom Ablenkungswinkel  $\alpha$  bestimmt, der von der Lichtwellenlänge  $\lambda$  und von der Spaltbreite  $D$  abhängt. (Bild: Monika Maintz)

Welche Konsequenzen hat dies nun für eine optische Abbildung? Ganz egal, ob man Licht, nachdem es einen engen Spalt durchquert hat, auf einen Projektionsschirm, den Chip einer Digitalkamera oder in ein Auge fallen lässt: Es entsteht immer ein Interferenzmuster. Die Lichtquelle, in diesem Fall der „leuchtende Spalt“, wird nie als einzelner, scharf abgegrenzter Lichtstreifen, sondern immer als Streifenmuster bzw. Beugungsfigur abgebildet. Das Licht konzentriert sich also nicht in einem bestimmten Gebiet, sondern schmiert sozusagen über einen größeren Bereich aus. Die Breite und Helligkeit der Maxima bzw. wie nah die Maxima nebeneinander liegen, hängt für eine bestimmte Wellenlänge oder Farbe des Lichts nur von der Breite des Spalts ab.

#### 4. Beugung an kreisförmigen Öffnungen

Was für einen Spalt gilt, lässt sich direkt auf eine kreisförmige Öffnung übertragen. Fällt Licht durch eine runde Öffnung, z. B. eine Lochblende, wirkt diese wie eine Lichtquelle, genauer wie

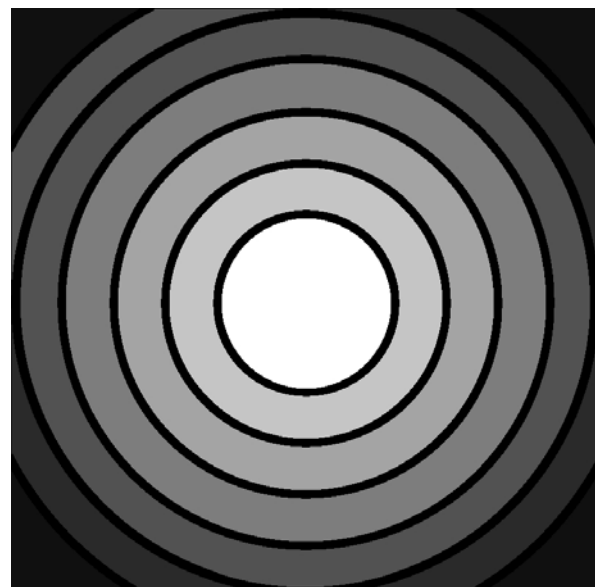
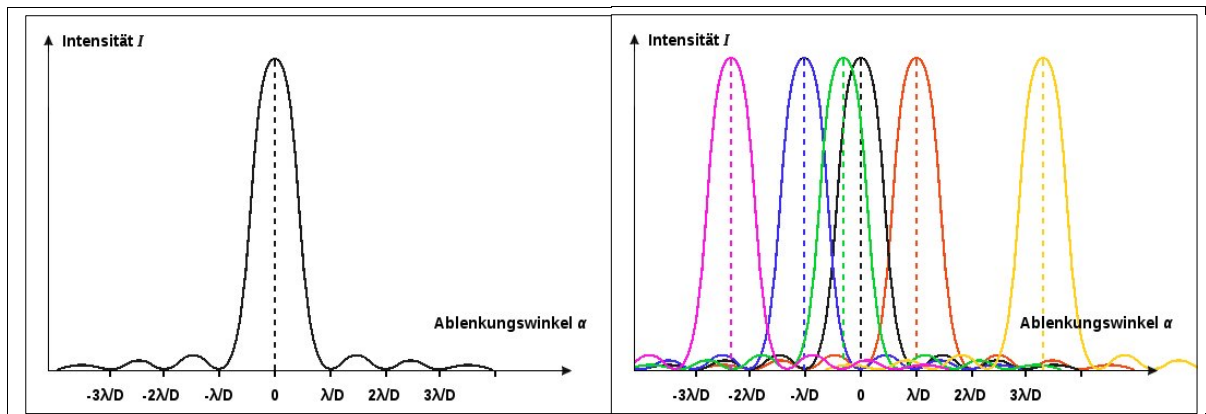


Abbildung 3: Beugungsfigur einer kreisförmigen Öffnung (schematisch). (Bild: Monika Maintz)



**Abbildung 4:** Links: Beugungsfigur, die durch die Beugung des Licht an einer kreisförmigen Öffnung entsteht. Auch Punktquellen bzw. Punkte werden in dieser Weise abgebildet. Der Ablenkungswinkel  $\alpha$  (im Bogenmaß) gibt an, wie weit ein Lichtstrahl aufgrund der Beugung von seiner ursprünglich Ausbreitungsrichtung abgelenkt wurde. Rechts: Beugungsfiguren mehrerer benachbarter Punkte. Je näher die abgebildeten Punkte beieinander liegen, desto stärker überlappen sich ihre Beugungsscheibchen. (Bilder: Monika Maintz)

eine Punktquelle. Die Beugung der Lichtwellen am Rand der Blendenöffnung bewirkt, dass z. B. auf einem Projektionsschirm nie ein einzelner, scharf abgegrenzter Lichtfleck, sondern immer eine Beugungsfigur zu sehen ist. Diese besteht aus einem hellen Scheibchen in der Mitte, dem *Beugungsscheibchen*, das dem Hauptmaximum der Beugungsfigur eines Spalt entspricht und analog zu diesem abwechselnd von dunklen und hellen Ringen (Beugungsminima und -maxima 1., 2., 3. usw. Ordnung) umgeben ist. Dies ist in Abbildung 3 schematisch dargestellt.

Generell gilt für optische Abbildungen: Punktquellen bzw. Punkte werden nicht als Punkte, also nicht als scharf begrenzte Lichtflecke, sondern immer als ausgedehnte Beugungsfiguren abgebildet (Abb. 4, links). Dies hat zur Folge, dass Beugungsfiguren, die durch die Abbildung nebeneinander liegender Punkte entstehen, sich immer mehr oder weniger stark überlappen (Abb. 4, rechts). Auch hier hängen die Helligkeit der Maxima sowie ihr Abstand voneinander bei gegebener Lichtwellenlänge nur vom Durchmesser der Öffnung ab.

## 5. Bedingungen für die Entstehung von Beugungsminima und -maxima

Betrachten wir nun das Beugungsbild eines Spalts auf einem Projektionsschirm etwas genauer (Abb. 2). Der Schirm sei in einer Entfernung  $E$  vom Spalt aufgestellt. Der Spalt habe die Breite  $D$ . Die Lichtwellen, die aus dem Spalt austreten, kann man dem Huygensschen Prinzip zufolge als Elementarwellen betrachten, die in jedem Punkt innerhalb des Spalts entstehen. Beim Austritt aus dem Spalt schwingen sie in gleicher Phase. Da sich die Elementarwellen in Form von Kreiswellen in alle Richtungen gleichmäßig ausbreiten, kommt es hinter dem Spalt zur Überlagerung der Einzelwellen (Interferenz). Je nachdem, in welche Ausbreitungsrichtung man schaut, weisen die einzelnen Wellen zueinander verschieden große Gangunterschiede auf, d. h. sie schwingen in unterschiedlichen Phasen. Das führt dazu, dass sie sich an bestimmten Stellen gegenseitig verstärken (Wellen schwingen genau gleichphasig zueinander), dass sie sich gegenseitig schwächen (Wellen schwingen zueinander in unterschiedlichen Phasen) oder dass sie sich gegenseitig auslöschen (Wellen schwingen genau gegenphasig zueinander).

Lichtwellen, die auf dem Projektionsschirm an einem Punkt  $P$  auftreffen, der von der Mitte der Beugungsfigur – auch optische Achse genannt – einen (im Verhältnis zu  $E$  sehr kleinen) Abstand  $A$

hat, können also nicht nur von der Spaltmitte, sondern auch vom Rand des Spaltes kommen. Kommt die Lichtwelle vom Spaltrand, so muss sie eine Wegstrecke  $l_1$  zum Punkt  $P$  zurücklegen. Um genau denselben Punkt zu erreichen, muss eine Welle, die aus der Spaltmitte kommt, etwas weiter laufen, d. h. sie muss eine etwas längere Wegstrecke  $l_2$  zurücklegen. Ist die Strecke  $l_1$ , die eine Lichtwelle vom Spaltrand aus laufen muss, gegenüber der Strecke  $l_2$ , die eine Lichtwelle von der Spaltmitte aus laufen muss, genau um die Hälfte der Lichtwellenlänge, d.h. um  $\lambda/2$  kürzer, so treffen am Punkt  $P$  ein Wellenberg und ein Wellental aufeinander und beide Wellen löschen sich aus. Diese Bedingung gilt aber nicht nur für zwei Lichtwellen, die exakt von einem Rand sowie der Mitte des Spalts kommen. Auch unter den Wellen, die zwischen dem einen Spaltrand und der Spaltmitte sowie der Spaltmitte und dem anderen Spaltrand entstehen, finden sich Wellenpaare, die diese Bedingung erfüllen. Alle diese Wellenpaare löschen sich im Punkt  $P$  auf dem Schirm aus. Daher sehen wir dort einen dunklen Fleck, ein Helligkeitsminimum (Beugungsminimum).<sup>1</sup>

Da der Abstand  $A$  des Beugungsminimums von der optischen Achse sehr klein ist, ist das Verhältnis der Strecke  $A$  zur Strecke  $E$  (Entfernung des Projektionsschirms vom Spalt) das gleiche wie das Verhältnis der Strecke  $\lambda/2$  (Wegstrecke, die eine von der Spaltmitte kommende Lichtwelle weiter zum Schirm laufen muss) zur Strecke  $D/2$  (Entfernung der Spaltmitte vom Spaltrand):

$$A / E = (\lambda/2) / (D/2) = \lambda / D. \quad \text{(Gleichung 1)}$$

Dieses Streckenverhältnis ist gleich dem im Bogenmaß gemessenen Ablenkungswinkel  $\alpha$ .<sup>2</sup> Dieser gibt an, wie weit das Licht oder genauer Lichtstrahlen beim Durchgang durch einen Spalt von ihrer ursprünglichen Ausbreitungsrichtung (senkrecht zum Spalt) abgelenkt werden. Die Entstehung von Beugungsminima und -maxima wird also durch die Größe des Ablenkungswinkels  $\alpha$  bestimmt. Damit ein Beugungsminimum  $n$ -ter Ordnung entstehen kann, muss gemäß obiger Darstellung also folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\alpha_n = n \cdot \lambda / D. \quad \text{(Winkel } \alpha \text{ im Bogenmaß!)} \quad \text{(Gleichung 2)}$$

Ein Beugungsmaximum  $n$ ter Ordnung entsteht, wenn gilt:

$$\alpha_n = (n + \frac{1}{2}) \cdot \lambda / D. \quad \text{(Winkel } \alpha \text{ im Bogenmaß!)} \quad \text{(Gleichung 3)}$$

Für die Minima und Maxima von Beugungsfiguren, die aufgrund der Beugung von Lichtwellen an kreisförmigen Öffnungen entstehen, gelten ähnliche Bedingungen. Anders als bei der Beugung am Spalt ergibt sich für den Ablenkungswinkel  $\alpha_1$  zum ersten Beugungsminimum hier jedoch ein etwas modifizierter Ausdruck:

$$\alpha_1 = 1,22 \cdot \lambda / D. \quad \text{(Winkel } \alpha \text{ im Bogenmaß!)} \quad \text{(Gleichung 4)}$$

1 Für die Entstehung eines Helligkeitsmaximums (Beugungsmaximum) gilt eine ähnliche Überlegung. Hier müssen zwei Wellenberge aufeinander treffen, die sich bei ihrer Überlagerung gegenseitig verstärken. Der Unterschied zwischen den Wegstrecken  $l_1$  und  $l_2$ , die die Lichtwellen vom Spaltrand bzw. der Spaltmitte aus zurücklegen müssen, muss in diesem Fall genau  $\lambda$  betragen.

2 Bei genauer Betrachtung ergibt sich folgender mathematische Zusammenhang zwischen dem Abstand  $A$  und der Entfernung  $E$  einerseits:  $\tan \alpha = A / E$ , und zwischen der Lichtwellenlänge  $\lambda$  und der Spaltbreite  $D$  andererseits:  $\sin \alpha = \lambda / D$ . Da wir bei obiger Betrachtung jedoch nur sehr kleine Ablenkungswinkel  $\alpha$  berücksichtigen, können wir die Näherung für kleine Winkel verwenden und es gilt:  $\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$ . D.h. die Streckenverhältnisse  $A/E$  und  $\lambda/D$  sind beide gleich  $\alpha$  und damit gleich groß.

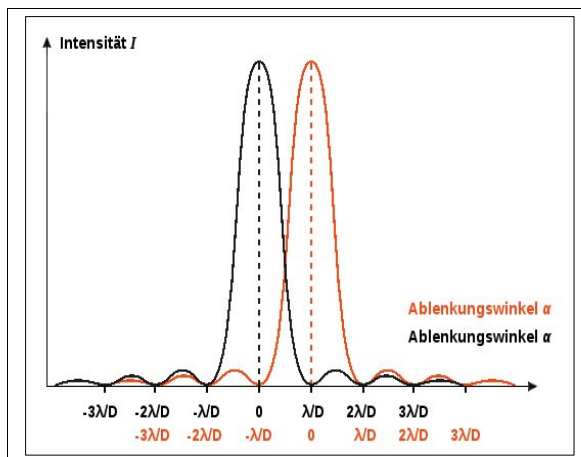


Abbildung 5: Um zwei benachbarte Punkte gerade noch voneinander trennen zu können, muss die Mitte des einen Beugungsscheibchens (schwarze Kurve) auf den Rand des anderen Beugungsscheibchens (rote Kurve) fallen. (Bild: Monika Maintz)

## 6. Auflösungsvermögen

Da bei einer optischen Abbildung Punkte aufgrund der Beugung nie als Punkte, sondern immer als Beugungsfiguren abgebildet werden, überlagern sich auf einem Projektionschirm, dem Chip einer Digitalkamera oder in der Brennebene eines Teleskops die Beugungsfiguren aller benachbarten Punkte. Ob man zwei Punkte als Einzelpunkte erkennen kann, hängt davon ab, wie stark sich ihre Beugungsscheibchen überlappen. Um zwei Punkte gerade noch voneinander trennen bzw. um sie in einzelne Punkte auflösen zu können, muss das Hauptmaximum (Maximum nullter Ordnung) des einen Beugungsscheibchens genau auf das Beugungsminimum 1. Ordnung des anderen Beugungsscheibchens fallen. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Mitte des einen Beugungsscheibchens auf den Rand des anderen Beugungsscheibchens fallen

muss (Abb. 5). Ein optisches Gerät kann zwei benachbarte Punkte also nur dann getrennt abbilden, wenn die Punkte vom Objektiv des Geräts aus gesehen einen ganz bestimmten Mindestabstand haben. Dieser wird als Winkelabstand im Bogenmaß gemessen und mit  $\alpha$  bezeichnet. Gemäß Abschnitt 5 entspricht dieser Winkelabstand  $\alpha$  dem Ablenkungswinkel  $\alpha_1$ , der bei der Beugung von Licht an Öffnungen für die Entstehung des Beugungsminimums 1. Ordnung verantwortlich ist. Für den Winkelabstand  $\alpha$ , den ein optisches Gerät mit einem kreisförmigen Objektiv mit dem Durchmesser  $D$  (z. B. ein Teleskop) gerade noch auflösen kann, ergibt sich daher folgender Ausdruck:

$$\alpha = 1,22 \cdot \lambda / D. \quad (\text{Winkel } \alpha \text{ im Bogenmaß!}) \quad (\text{Gleichung 5})$$

Der Winkelabstand  $\alpha$  bestimmt also das Auflösungsvermögen bzw. die Trennschärfe eines optischen Geräts. Zu beachten ist, dass  $D$  in diesem Zusammenhang für den Objektivdurchmesser steht.

Betrachten wir nun den linearen Abstand  $A$  zweier Punkte, die gerade noch aufgelöst werden können. Für den linearen Abstand in der Brennebene eines optischen Geräts mit kreisförmigem Objektiv gilt eine ähnliche Überlegung wie für den Winkelabstand  $\alpha$ . Ausgehend von Gleichung 1 ergibt sich:

$$A / f_1 = \alpha = 1,22 \cdot \lambda / D \rightarrow A = 1,22 \cdot \lambda \cdot f_1 / D. \quad (\text{Gleichung 6})$$

Anstelle der Entfernung  $E$  des Projektionschirms von der beugenden Öffnung wird hier die Brennweite  $f_1$  des optischen Systems verwendet. Die Größe  $D$  gibt auch hier den Durchmesser des Objektivs an.

## 7. Lichtstärke

In der Astronomie hat man es in den meisten Fällen mit sehr weit entfernten, lichtschwachen Objekten zu tun. Daher ist es wichtig, Teleskope so zu konstruieren, dass sie möglichst viel Licht aufsammeln können. Denn erst dadurch werden auch extrem lichtschwache Objekte der Beobachtung zugänglich.

Wenn man punktförmige Lichtquellen wie Sterne betrachtet, gilt für die Lichtstärke  $I_{\text{Punkt}}$  eines Teleskops prinzipiell: Je größer die Öffnung, d. h. je größer der Durchmesser des Objektivs bzw. Teleskopspiegels, desto größer das Lichtsammelvermögen. Diese einfache Faustregel ist gültig, da die Lichtstärke  $I_{\text{Punkt}}$  mit dem Objektiv- bzw. Spiegeldurchmesser  $D$  über die Relation

$$I_{\text{Punkt}} \sim D^2$$

verknüpft ist. Vergrößert sich die Licht sammelnde Querschnittsfläche  $D^2$ , dann nimmt auch die Lichtstärke  $I_{\text{Punkt}}$  automatisch zu.

## 8. Öffnungsverhältnis

Das Öffnungsverhältnis einer Linse bzw. eines Objektivs ist definiert als Verhältnis von Linsen- bzw. Objektivdurchmesser zu Linsen- bzw. Objektivbrennweite:

$$D / f_1$$

Oft wird das Öffnungsverhältnis nicht direkt angegeben. Stattdessen findet man häufig die Angabe des Kehrwert  $f_1 / D$ .

## 9. Vergrößerung

Die Vergrößerung  $V$  eines Teleskops hängt nur vom Verhältnis der Brennweite  $f_1$  des Objektivs und der Brennweite  $f_2$  des Okulars ab. Es gilt:

$$V = f_1 / f_2 \quad \text{(Gleichung 7)}$$

Die Objektivbrennweite eines Teleskops ist dabei eine feste Größe, kann also nicht verändert werden (sonst müsste man das Objektiv des Teleskops austauschen). Die Vergrößerung lässt sich jedoch verändern, wenn man Okulare mit verschiedenen Brennweiten verwendet.

## Aufgaben

### Aufgabe 1:

Welche Größen bedingen die Leistungsfähigkeit eines Teleskops? Warum?

### Aufgabe 2:

Berechne das Auflösungsvermögen des menschlichen Auges für eine Lichtwellenlänge von 500 nm. Bei heller Beleuchtung hat die Pupille einen Durchmesser von etwa 2 mm.

### Aufgabe 3:

Berechne das Auflösungsvermögen eines Teleskops mit einem Objektivdurchmesser von 2 m für eine Lichtwellenlänge von 500 nm. Vergleiche das Ergebnis mit dem Ergebnis von Aufgabe 1.

### Aufgabe 4:

Wie kann man das Auflösungsvermögen eines optischen Geräts verbessern?

### Aufgabe 5:

Die vier großen Spiegelteleskope am VLT haben Spiegeldurchmesser von 8,4 m. Das E-ELT soll einmal einen Spiegeldurchmesser von knapp 40 m haben (siehe Abb. 1). Um welchen Faktor wird das Auflösungsvermögen des E-ELT im Vergleich zum VLT einmal besser sein?

### Aufgabe 6:

Wie groß ist der lineare Durchmesser  $d$  des Beugungsscheibchens eines Sterns, der mit einem Teleskop gerade noch aufgelöst werden kann? (Überlege, wo die Abbildung im Teleskop entsteht, und leite mit Hilfe dieser Information einen allgemeinen Ausdruck für den linearen Durchmesser ab.)

### Aufgabe 7:

Von welcher Größe hängt der lineare Radius des Beugungsscheibchens einer Punktquelle ab, die einfarbiges Licht aussendet und mit einem Teleskop gerade noch aufgelöst werden kann? (Überlege, durch welche Größen der lineare Radius definiert ist.)

### Aufgabe 8:

Wie kann man die Vergrößerung eines Teleskops maximieren?

### Aufgabe 9:

Wann ist eine Abbildung im Vergleich zu einer anderen schärfer?

### Aufgabe 10:

Wodurch wird die Größe eines Bildes, das in der Brennebene eines Teleskops erzeugt wird, bestimmt? (Die Wellenlänge des Lichts soll bei dieser Betrachtung nicht berücksichtigt werden.)

### Aufgabe 11:

Welches der Teleskope, die in unten stehender Tabelle charakterisiert werden, erzeugt in seiner Brennebene im Vergleich zu den anderen Teleskopen das größte Bild? Was lässt sich über die Öffnungsverhältnisse der Teleskope 2 und 5 aussagen?

### Aufgabe 12:

Warum spricht man in Bezug auf Teleskope und andere optische Geräte von einer „beugungsbegrenzten Auflösung“?

### Aufgabe 13:

Warum spricht man, wenn man über eine bestimmte Vergrößerung hinaus geht, von einer „leeren Vergrößerung“?



## Lösungen

### Lösung zu Aufgabe 1:

Die Größen, die die Leistungsfähigkeit eines Teleskops bedingen, sind die Lichtstärke und das Auflösungsvermögen. Begründung:

Die *Lichtstärke* bedingt die Leistungsfähigkeit eines Teleskops, weil sie direkt mit dem Lichtsammelvermögen des Teleskops in Beziehung steht. Das Lichtsammelvermögen hängt in erster Linie von der Querschnittsfläche  $D^2$  des Objektivs ab. Diese wird durch den Durchmesser  $D$  des Objektivs bestimmt. Für die Beobachtung punktförmiger Lichtquellen gilt der Zusammenhang  $I_{\text{punkt}} \sim D^2$ . Die Lichtstärke vergrößert sich also automatisch, wenn sich die Querschnittsfläche und damit die Lichtsammelfläche vergrößert. Dies ist wichtig, da man es in der Astronomie oft mit lichtschwachen Objekten zu tun hat. Um sie beobachten zu können, muss ein Teleskop möglichst viel Licht sammeln.

Das *Auflösungsvermögen* bedingt die Leistungsfähigkeit des Teleskops, weil es bestimmt, bis zu welchem kleinsten Winkelabstand  $\alpha$  zwei eng nebeneinander liegende Punkte gerade noch als einzelne Punkte abgebildet werden können. Je kleiner dieser Winkelabstand ist, desto mehr Details können sichtbar gemacht werden. Für  $\alpha$  gilt die Beziehung:  $\alpha = 1,22 \cdot \lambda / D$ . Das Auflösungsvermögen steht also in direkter Beziehung zum Objektiv- bzw. Spiegeldurchmesser  $D$ . Nimmt dieser zu, so wird auch der minimale Winkelabstand  $\alpha$  kleiner und die Detailschärfe einer Abbildung nimmt zu.

### Lösung zu Aufgabe 2:

Für den kleinsten im Bogenmaß gemessenen Winkelabstand  $\alpha$ , der gerade noch aufgelöst werden kann, gilt die Beziehung:  $\alpha = 1,22 \cdot \lambda / D$

Mit  $D$  (Pupillendurchmesser) = 2 mm und Lichtwellenlänge  $\lambda = 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$  ergibt sich:  
Winkelabstand  $\alpha = 1,22 \cdot \lambda / D = (1,22 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}) / 2 \text{ mm} = 0,000305$  (im Bogenmaß)

Dies entspricht einem Winkel von etwa 1'. Das menschliche Auge kann demnach zwei Punkte, die etwa 1' voneinander entfernt sind, gerade noch als getrennte Punkte wahrnehmen.

### Lösung zu Aufgabe 3:

Für den kleinsten im Bogenmaß gemessenen Winkelabstand  $\alpha$ , der gerade noch aufgelöst werden kann, gilt die Beziehung:  $\alpha = 1,22 \cdot \lambda / D$ . Mit dem Objektivdurchmesser  $D = 2 \text{ m}$  und der Lichtwellenlänge  $\lambda = 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$  ergibt sich:

Winkelabstand  $\alpha = 1,22 \cdot \lambda / D = (1,22 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}) / 2000 \text{ mm} = 0,3 \cdot 10^{-6}$  (im Bogenmaß)

Dies entspricht einem Winkel von etwa 0,06". Das menschliche Auge kann demnach zwei Punkte, die etwa 1' voneinander entfernt sind, gerade noch als getrennte Punkte wahrnehmen.

### Vergleich mit Aufgabe 1:

Für das Auflösungsvermögen des Auges gilt:  $\alpha (\text{Auge}) = 1,22 \cdot \lambda / D = (1,22 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}) / 2 \text{ mm}$   
Entsprechend gilt für das Teleskop:  $\alpha (\text{Teleskop}) = 1,22 \cdot \lambda / D = (1,22 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}) / 2000 \text{ mm}$

Wenn man die beiden Ausdrücke durcheinander teilt, fallen der Faktor 1,22 und die Lichtwellenlänge  $\lambda$  weg und es ergibt sich:  $\alpha (\text{Teleskop}) = \alpha (\text{Auge}) / 1000 \rightarrow$  Das Teleskop kann Winkelabstände auflösen, die im Vergleich zum Auge bis zu 1000-mal kleiner sind.

#### **Lösung zu Aufgabe 4:**

Für den kleinsten im Bogenmaß gemessenen Winkelabstand  $\alpha$ , der gerade noch aufgelöst werden kann, gilt die Beziehung:  $\alpha = 1,22 \cdot \lambda / D$ . Das Auflösungsvermögen hängt daher sowohl von der Lichtwellenlänge  $\lambda$  als auch vom Objektivdurchmesser  $D$  des optischen Geräts ab. Um das Auflösungsvermögen zu verbessern, muss der Winkelabstand  $\alpha$  kleiner werden. Das erreicht man einerseits, indem man den Durchmesser  $D$  größer macht, d. h. indem man ein Objektiv mit einem größeren Durchmesser verwendet, oder andererseits, indem man die Lichtwellenlänge  $\lambda$  kleiner macht, d. h. wenn man mit Licht beobachtet, das eine kürzere Wellenlänge hat.

#### **Lösung zu Aufgabe 5:**

Für das Auflösungsvermögen eines Teleskops am VLT gilt:  $\alpha_{\text{VLT}} = 1,22 \cdot \lambda / 8,4 \text{ m}$

Für das Auflösungsvermögen des E-ELT gilt:  $\alpha_{\text{E-ELT}} = 1,22 \cdot \lambda / 40 \text{ m}$

Teilt man die beiden Ausdrücke durcheinander, dann fallen der Faktor 1,22 und die Lichtwellenlänge  $\lambda$  weg und es ergibt sich:

$$\alpha_{\text{VLT}} / \alpha_{\text{E-ELT}} = 40 \text{ m} / 8,4 \text{ m} = 4,76 \quad \rightarrow \quad \alpha_{\text{E-ELT}} = \alpha_{\text{VLT}} / 4,76$$

Der kleinste Winkelabstand  $\alpha$ , den das E-ELT einmal messen wird, ist etwa 5-mal kleiner als der kleinste Winkelabstand  $\alpha$ , der heute am VLT gemessen werden kann.

#### **Lösung zu Aufgabe 6:**

Lösung: Das Beugungsscheibchen wird in der Brennebene des Teleskops abgebildet. Der lineare Abstand  $A$  zweier Punkte, die gerade noch aufgelöst werden können, beträgt  $A = 1,22 \cdot \lambda \cdot f_1 / D$  (Gleichung 6). Dieser Abstand entspricht dem Radius des Beugungsscheibchens eines Punkts, der gerade noch aufgelöst werden kann. Da ein Stern aufgrund seiner großen Entfernung im Teleskop punktförmig erscheint, entspricht der lineare Durchmesser  $d$  des Sterns dem linearen Durchmesser eines Punktes, der gerade noch aufgelöst werden kann. Dieser lässt sich folgendermaßen allgemein ausdrücken:  $d = 2 \cdot A = 2,44 \cdot \lambda \cdot f_1 / D$

#### **Lösung zu Aufgabe 7:**

Lösung: Der lineare Abstand  $A$  zweier Punkte, die gerade noch aufgelöst werden können, beträgt  $A = 1,22 \cdot \lambda \cdot f_1 / D$  (Gleichung 6). Dieser Abstand entspricht dem Radius des Beugungsscheibchens einer Punktquelle und damit dem Radius des Beugungsscheibchens eines Punkts. Da das ausgesandte Licht einfarbig ist, ist die Wellenlänge  $\lambda$  konstant. Daher kann der Radius nur von den Größen  $f_1 / D$  abhängen und damit vom Kehrwert des Öffnungsverhältnisses.

#### **Lösung zu Aufgabe 8:**

Die Vergrößerung  $V$  eines Teleskops hängt nur vom Verhältnis der Objektivbrennweite  $f_1$  zur Okularbrennweite  $f_2$  ab:  $V = f_1 / f_2$ . Die Objektivbrennweite  $f_1$  ist durch das Teleskop fest vorgegeben und kann nicht verändert werden. Um die Vergrößerung zu maximieren, muss man ein Okular mit einer möglichst kleinen Brennweite verwenden. Denn nur so kann man das Verhältnis  $f_1 / f_2$  und damit die Vergrößerung  $V$  erhöhen.

**Lösung zu Aufgabe 9:**

Eine Abbildung ist im Vergleich zu einer anderen Abbildung schärfer, wenn sie mehr Details erkennen lässt. Das ist dann der Fall, wenn eine Abbildung mit einem optischen Gerät gemacht wurde, das ein größeres Auflösungsvermögen hat. Der lineare Durchmesser eines Beugungsscheibchens ist in diesem Fall kleiner. Daher überlappen die Beugungsscheibchen benachbarter Bildpunkte weniger und man kann kleinere Strukturen und damit mehr Details sichtbar machen.

**Lösung zu Aufgabe 10:**

Für den linearen Durchmesser des Beugungsscheibchens eines Punktes, das in der Brennebene des Teleskops abgebildet wird und das man gerade noch auflösen kann, gilt:  $d = 2 \cdot A = 2,44 \cdot \lambda \cdot f_1 / D$ . Wenn die Wellenlänge des Lichts keine Rolle spielt, hängt die Größe eines Beugungsscheibchens nur von der Brennweite  $f_1$  des Teleskops und dem Durchmesser  $D$  seines Objektivs ab. Da  $f_1$  und  $D$  über das Öffnungsverhältnis verknüpft sind, hängt die Größe eines Bildes in der Brennebene letztlich vom Kehrwert des Öffnungsverhältnisses ab.

**Lösung zu Aufgabe 11:**

Teleskop	Objektivdurchmesser $D$	Brennweite $f_1$	Öffnungsverhältnis $D / f_1$	Öffnungsverhältnis Kehrwert $f_1 / D$
Teleskop 1	7 cm	70 cm	0,1	10
Teleskop 2	25 cm	4 m	0,625	16
Teleskop 3	70 cm	10,5 m	0,0666	15
Teleskop 4	102 cm	19,4 m	0,0525	19
Teleskop 5	66,25 cm	10,6 m	0,0625	16

Der lineare Durchmesser eines Bildes, das in der Brennebene eines Teleskops entsteht, ist folgendermaßen definiert:  $d = 2 \cdot A = 2,44 \cdot \lambda \cdot f_1 / D$ . Lässt man die Wellenlänge  $\lambda$  außer Acht, dann kann nur noch der Kehrwert  $f_1 / D$  des Öffnungsverhältnisses die Bildgröße beeinflussen. Um das Bild möglichst groß werden zu lassen, muss  $d$  möglichst groß werden. Folglich muss auch  $f_1 / D$  möglichst groß sein. Das Teleskop, dessen Kehrwert des Öffnungsverhältnisses am größten ist, erzeugt folglich in seiner Brennebene das größte Bild. In diesem Beispiel ist das Teleskop 4 mit  $f_1 / D = 19$ .

Teleskop 2 und Teleskop 5 haben dasselbe Öffnungsverhältnis, obwohl sich ihre Ausmaße deutlich voneinander unterscheiden. Dies zeigt, dass Teleskope ähnliche Eigenschaften haben können, obwohl sie sich in ihrer Größe sehr unterscheiden.

**Lösung zu Aufgabe 12:**

Punkte werden aufgrund der Beugung an Öffnungen grundsätzlich nicht als Punkte, sondern immer als Beugungsscheibchen abgebildet. Man kann die Beugungsscheibchen zwar mit zunehmender Objektivöffnung immer kleiner machen, aber man kann die Effekte der Beugung nie ganz ausschalten. Daher ist das Auflösungsvermögen eines optischen Systems immer durch die Beugung begrenzt.

### **Lösung zu Aufgabe 13:**

Da Vergrößerung ( $V = f_1 / f_2$ ) und Auflösungsvermögen ( $\alpha = 1,22 \cdot \lambda / D$ ) nicht voneinander abhängen, kann man ab einer bestimmten Vergrößerung auf einem Bild keine weiteren Details mehr erkennen. Das ist dasselbe, wie wenn man sich ein Bild in der Zeitung mit einer Lupe anschaut. Irgendwann sieht man nur noch die einzelnen farbigen Bildpunkte.

### **Weiterführende Literatur**

- Lochkamera (Camera obscura):  
„Spalt oder nicht Spalt: Wie bekommt man eine scharfe Abbildung?“,  
WIS-Artikel zu SuW 7/2010, Monika Maintz  
([www.wissenschaft-schulen.de/artikel/1049298](http://www.wissenschaft-schulen.de/artikel/1049298))
- Entstehung und Ausbreitung von Wellen, Huygenssches Prinzip:  
„Endlich scharf sehen - Brillen für Teleskope oder wie funktioniert die adaptive Optik?“,  
WIS-Artikel zu SuW 3/2009, Monika Maintz  
([www.wissenschaft-schulen.de/artikel/1049456](http://www.wissenschaft-schulen.de/artikel/1049456))

Bei Fragen, Anmerkungen, Berichtigungen, Anregungen etc. wenden Sie sich  
bitte per E-Mail an:

[Monika.Maintz@astronomieschule.org](mailto:Monika.Maintz@astronomieschule.org)

**Rückmeldungen sind immer willkommen!**