LOGARITHMISCHE SKALEN

Geometrische Folgen und Pseudo-Einheiten

Die geometrische Folge und die von ihr abstammenden stetigen Funktionen log und exp erlauben die bequeme Beherrschung aller Größenordnungen, führen aber auch zu Pseudo-Einheiten, die teilweise den Laien mehr verwirren, als dem Experten zu nützen.

Von Norbert Treitz

Der Physiologe Ernst Heinrich Weber (1795–1878) fand 1834, dass es für unser Wahrnehmungsvermögen in erster Linie nicht auf absolute Unterschiede, sondern auf relative ankommt: Ein Mensch kann zwei verschieden starke Reize R und $R+dR$ unterscheiden, wenn der Quotient dR/R (und nicht etwa die schlichte Differenz dR) einen gewissen Mindestwert überschreitet. Diese »relative differenzielle Reizschwelle« ist für verschiedene Arten der Wahrnehmung verschieden, für jeweils eine Wahrnehmung jedoch über weite Bereiche konstant: Tonfrequenz 0,003, Lichtstärke 0,016, Gewicht 0,019, Schall-Energiestromdichte 0,088. Das ist das Gesetz von Weber.

Später spekulierte Gustav Theodor Fechner (1801–1887), dass es Empfindungsstärken gebe, die den Logarithmen der Reizstärken proportional seien. Das erklärt das Gesetz von Weber, wenn man zusätzlich unterstellt, dass wir zwei Wahrnehmungen unterscheiden können, wenn die Differenz der Empfindungsstärken eine gewisse Schwelle überschreitet. Das wird dann als Weber-Fechner-Gesetz bezeichnet und liefert eine – wackelige – Rechtfertigung dafür, dass wir in Akustik, Elektrotechnik, Fotografie und Astronomie logarithmische Skalen haben.

Wohlgemerkt: Gegen logarithmische Skalen ist im Prinzip nichts einzuwenden. Sie sind oft sehr nützlich; für die dazu passenden Quasi-Einheiten gilt das nicht immer.

Gewisse Größen nehmen Werte über viele Zehnerpotenzen hinweg an. Will man sie maßstäblich (»linear«) darstellen, reicht entweder das Papier für die großen Werte nicht, oder die kleinen schrumpfen so, dass sie im Nullpunkt verschwinden. Dagegen hilft die logarithmische Darstellung. Vereinfacht gesagt, gibt man statt der Zahlen nur noch deren Zehner-Exponenten an und bekommt damit alles in den Griff, was die Natur von Elementarteilchen bis zu Galaxienhaufen zu bieten hat. Man sollte nur nicht in den Fehler verfallen, den Logarithmus der Größe mit der Größe selbst zu verwechseln.

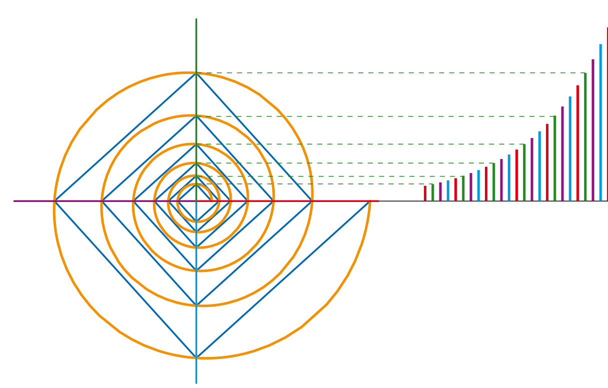
Was die logarithmische Skala für die grafische Darstellung, das ist für das materielle Bereitstellen einer Größe, die über einen großen Bereich variiert, die geometrische Folge. Das geläufigste Beispiel tragen wir in unserer Hosentasche mit uns herum: Die Werte der Münzen und Scheine sind in drei Schritten pro Zehnerpotenz abgestuft, aber vernünftigerweise nicht gleichmäßig, sondern gerundet und damit eingepasst in das Dezimalsystem. So unterscheiden sich zwei aufeinander folgende Geldwerte nicht durch

Der Höhensatz und die geometrische Folge

Wird die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks vom Höhenfußpunkt in die Teile p und q geteilt, gilt mit der Höhe h die Relation $p:h=h:q$. Das folgt aus der Ähnlichkeit der Teildreiecke und liefert eine bequeme zeichnerische Methode zur Ermittlung des »geometrischen Mittels« h aus p und q. Das arithmetische Mittel $(p+q)/2$ tritt hier als Radius des Thaleskreises auf.

Aus einem rechtwinkligen Dreieck macht man durch Drehstreckungen eine Folge ähnlicher Dreiecke. Es ist auch eine »geometrische Folge« im üblichen Sinn des Wortes, denn der Quotient aufeinander folgender Hypotenusen (die »Basis« der geometrischen Folge) ist konstant. Indem man in der geometrischen Folge $a_0 b^n$ für den Index n auch nichtganze Zahlen zulässt, kommt man zur Exponentialfunktion $y=b^x$ und ihrer Umkehrfunktion $x=\log_b(y)$.

Für die Basis b ist »von Natur aus« die Zwei als die – nach der Eins – kleinste natürliche Zahl die günstigste Wahl, weswegen die Computer sie so gerne verwenden. Zweierpotenzen wie 8 oder 16 wären als Basen ebenso geeignet und würden unseren Merkfähigkeiten wegen der geringeren Ziffernzahl entgegenkommen. Leider ist unsere Standardbasis 10 keine Zweierpotenz. Mickey Mouse oder die sterblichen Figuren aus den Simpsons (alle außer Gott) haben vier Finger inklusive Daumen an jeder Hand und hätten bei hinreichender Intelligenz (ich denke an Lisa) die Chance gehabt, statt des Dezimal- das Oktalsystem zu erfinden. Dagegen ist die Basis des »natürlichen« Logarithmus, die Zahl e, weder eine natürliche Zahl noch für unsere Zwecke besonders bequem.



CHRISTOPH PÖPPE, NACH: NORBERT TREITZ

Als Faustregel für das Kopfrechnen ist $10^3 \approx e^7 \approx 2^{10}$ ausgesprochen hilfreich.

den Faktor $\sqrt[3]{10}$, sondern durch die Faktoren 2 (zweimal) und 2,5. Auch die Wägesätze verwenden die Zahlen 1, 2 und 5, benötigen die Zwei aber in doppelter Stückzahl, weil 5 mehr als das Doppelte von 2 ist.

Das ist nicht das sparsamste denkbare Sortiment an Wägestücken. Verzichten wir auf die Einbindung ins Dezimalsystem und fragen wir mit Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581–1638) nach einem Wägesatz aus möglichst wenig Stücken für eine zweischalige Waage ohne Skala, nur mit Gleichgewichtsmarke. Mit ihm soll man Pulver von allen »ganzzahligen« Gewichten von 1 bis n Einheiten abwiegen können. Man ist dann sogleich beim Binärsystem 1, 2, 4, 8, 16 …

Man legt die Stücke der Reihe nach – das schwerste zuerst – auf die Waage, schreibt eine Eins für jedes Stück, das liegen bleibt, und eine Null für jedes, das man wieder weglegen muss, weil die Waagschale mit den Wägestücken sich senkt: Das gibt die Binärzahl, die dem Gewicht des Pulvers am nächsten kommt. Ein elektrischer Analog-Digital-Wandler arbeitet im Prinzip ganz ähnlich. Umgekehrt kann man aus der Binärdarstellung ablesen, welche Gewichte man auflegen muss; so arbeitet ein Digital-Analog-Wandler.

So kann man mit sechs Stücken von 1 bis 32 alle Zahlen von 0 bis 63 erzeugen, mit m Stücken alle von 0 bis 2^m-1, und für alle Zahlen von 0 bis n braucht man die kleinste Anzahl, die nicht kleiner als $\log_2(n)$ ist.

Glühbirnen und andere Widerstände

Man kann Glühbirnen für 15, 25, 40, 60, 75, 100, 150 und 200 Watt kaufen. Das ist offenbar sinnvoller als 10, 20, 30, …, 190, 200, denn zwischen 10 und 20 braucht man eher eine Zwischenstufe als zwischen 190 und 200. Sieht man von der weniger gebräuchlichen 75-Watt-Birne ab, so hat man als »Stufen« Verhältnisse von rund 1,5 oder 1,6; für die Verzehnfachung von 15 bis 150 sind das fünf annähernd gleiche Faktoren. Genau gleiche hätten die fünfte Wurzel aus 10, das ist rund 1,58489. Die Leistungen der Glühbirnen folgen also mit einigen Rundungen einer geometrischen Folge der Basis $10^{0{,}2}$. Das ist offenbar sehr vernünftig, und man schreibt einfach die Leistungen im Klartext auf die Exemplare, so dass man die Grundrechenarten ohne Weiteres anwenden kann, wenn man mehrere Glühbirnen kombiniert.

Elektrische Widerstände werden geliefert in Abstufungen gemäß der 6. oder 12. oder 24. Wurzel aus 10 als Basis, je nach der benötigten Genauigkeit. Immerhin bekommt man aus der Folge E12 bereits jeden gewünschten Wert auf rund 10 Prozent genau (Bild rechts). Auch hierbei werden die Werte im Klartext genannt, und der Laie wundert sich höchstens darüber, dass man 470 Ohm kaufen kann, aber nicht so leicht 500.

Ein Händler könnte sie durchnummerieren und in einem Katalog diese Nummern verwenden. Völlig unsinnig wäre es aber nun, wenn er nur noch diese logarithmischen Nummern auf die Birnen – oder Widerstände – und ihre Verpackungen schriebe und von den Kunden verlangte, sie statt der Leistungsangaben zu verwenden.

Macht denn wirklich jemand so etwas? Ja. Aber darauf komme ich später zu sprechen.

In der Musik wird die Zeit durch Bruchzahlen skaliert, und zwar weit gehend in Potenzen von 1/2, offenbar weil man leicht halbieren kann, die Zeit ebenso gut wie Wurststücke »nach Augenmaß«. Dass die kürzeren Noten dabei im Schriftbild durch mehr Fähnchen oder Balken bevorzugt werden, scheint unlogisch, ist aber praktisch, denn bei den zeitlich längeren und visuell unauffällige-ren hat man mehr Zeit hinzuschauen. Bei Teilungen in 3 oder 5 kleinere Einheiten (Triolen, Quintolen) werden allerdings die entsprechenden Ziffern eingefügt.

Als Nr. 12 eines Abschnitts »Allerlei Kunststücke« (KA 230) notiert Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799) in einem seiner Sudelbücher: »Einen Format für Papier anzugeben, so daß Folio 4to und 8vo alle einander ähnlich werden.« Die traditionellen Bezeichnungen Quarto und Octavo deuten bereits an, dass bedrucktes Papier schon immer halbiert oder zu Hälften gefaltet wird. Lichtenbergs weiter gehende Forderung nach der geometrischen Ähnlichkeit führt sogleich auf die Wurzel aus 2 als Seitenverhältnis und damit – bis auf die Verankerung der Folge – auf die Norm DIN 476 (Walter Porstmann, 1922), heute ISO 216, bei der das Quadratmeter diese Verankerung bildet: Mit der Variable n hat

Die Handelswerte für Widerstände folgen näherungsweise einer logarithmischen Skala. Rot die Werte einer fiktiven, perfekt logarithmischen Reihe, bei der jeder Widerstand $\sqrt[24]{10} = 1{,}10069$ Mal so groß ist wie sein Vorgänger.

das Blatt DIN An die Fläche $(0{,}5)^n$ m^2. Von normalem Schreibpapier mit den üblichen 80 g/m^2 kann man also bedenkenlos drei A4-Blätter in einen Standardbrief stecken, der mitsamt Umschlag 20 Gramm haben darf, denn ein Blatt ist ein Sechzehntel eines Quadratmeters und wiegt daher 5 Gramm.

Die Wurzel aus 2 begegnet uns auf den Fotokopierern als Verkleinerungs- und Vergrößerungsmaßstab, was Lichtenberg sicher noch nicht geahnt hat. Moderne Menschen schlagen sich nicht mit lateinischen Bezeichnungen von Zweierpotenzen herum, haben sich aber mit den DIN-Nummern angefreundet, teilweise sogar mit den zwischengeschalteten

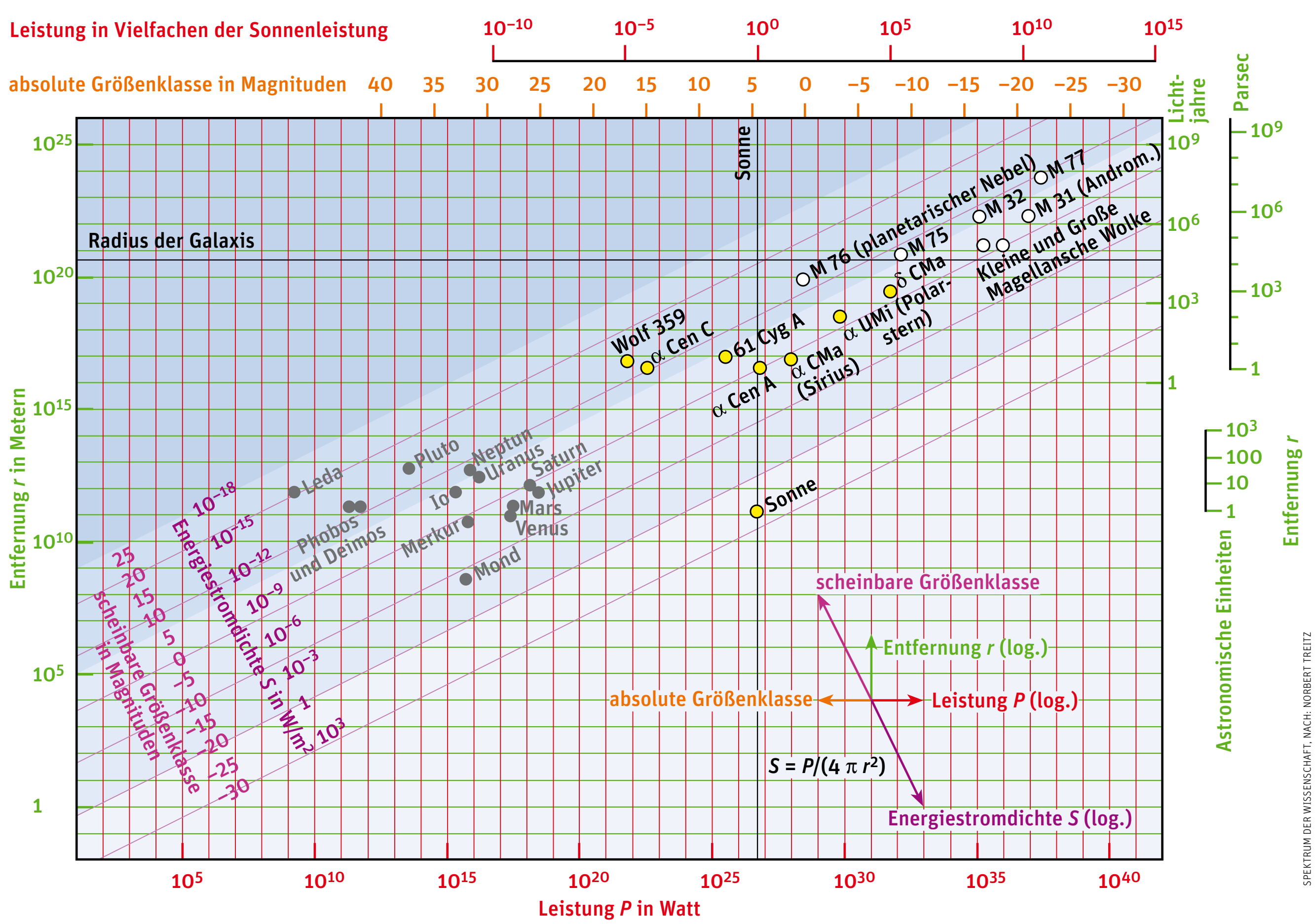
B- und C-Formaten für die Umschläge. Sie operieren also mehr oder weniger bewusst mit Logarithmen zur Basis 1/2.

In der klassischen (nichtdigitalen) Fotografie benötigt man je nach Filmsorte mehr oder weniger Licht für eine bestimmte Schwärzung. Bei gegebener Energiestromdichte am Objektiv ist die nötige Belichtungszeit in weiten Grenzen umgekehrt proportional zur Fläche der Blendenöffnung. Statt dieser Fläche wird aber am Gerät das Verhältnis von Brennweite zu Blendendurchmesser (und nicht etwa das vernünftigere umgekehrte Verhältnis) als »Blendenzahl« angezeigt. Feinkörnige Filme haben im Allgemeinen eine bessere räumliche Auflösung als gröbere, aber eine geringere Empfindlichkeit, man muss also für dasselbe Objekt länger belichten.

Für die Filmempfindlichkeit gibt es eine einfache Angabe: Bei 100 ASA braucht man doppelt so lange oder eine doppelt so große Blendenöffnung wie bei 200 ASA. Das ist so einfach wie bei den Glühbirnen, aber die Fotofachleute des deutschen Normenausschusses fanden das offenbar zu einfach: Wozu haben wir schließlich das Weber-Fechner-Gesetz gelernt, das ja auch irgendwie etwas mit dem Sehen zu tun hat? Jede Verdopplung wird durch eine Addition der Zahl 3 angezeigt, weil $\log_{10}(2)$ fast genau gleich 0,3 ist. Durch eine hochgestellte Null (wie ein Gradzeichen) deuten wir »Zehntel« an: 18^0 DIN entspricht 50 ASA, und 21^0 DIN gehört zu 100 ASA. Wozu also übersichtlich, wenn es auch anders geht? Heute stehen auf den Filmen beide Angaben nebeneinander, und man kann die völlig überflüssige logarithmische DIN-Angabe (mit ihrer Basis $10^{0,1}$) ganz einfach ignorieren.

Wie hell uns ein Stern erscheint, dafür ist – bei einiger Vereinfachung – entscheidend die auf der Erde ankommende Energiestromdichte, also (bis auf den Faktor 4π) Leistung durch Entfernungsquadrat. Seit der Antike unterscheidet man rund fünf Abstufungen, die *magnitudines* (»Größen«) heißen, was auf dreifache Weise ungeschickt oder antiintuitiv ist: Die Bezifferung erfolgt absteigend wie früher die der Schulklassen in altsprachlichen Gymnasien; die Bezeichnung unterstellt, dass alle Sterne gleich weit entfernt seien (das glaubte man in der Antike) und dass die Leistung eindeutig mit der Größe zu tun hat. Auch heute werden logarithmisch, und zwar zur Basis $0{,}01^{0,2}$, angegebene Werte der hier ankommenden Energiestromdichte als Magnitudines oder scheinbare Helligkeiten bezeichnet. Sirius, der für uns hellste Stern, hat die Magnitudo –1,46. Statt (sehr) vieler Worte zeigt das Bild unten den Zusammenhang verschiedener linearer und logarithmischer Maße für Längen, Leistungen und Energiestromdichten, die in der Astronomie vorkommen oder die sie (stattdessen) aus der allgemeinen Physik übernehmen könnte.

Kennt man die Entfernung des Sterns von unserem Sonnensystem, so kann



Astronomische Objekte und ihre energetischen Daten. Die Hintergrundfarben in diesem doppelt-logarithmischen Diagramm deuten Sichtbarkeit mit bloßem Auge und mit Fernrohren an. Die Farben der eingetragenen Punkte unterscheiden zwischen Galaxien, Sternhaufen, Sternen und den von der Sonne angestrahlten Planeten und Satelliten. Die Steigungen 1/2 und –2 ergeben sich aus Lamberts quadratischem Abstandsgesetz der Photometrie, also letztlich aus der Tatsache, dass unser Raum dreidimensional ist.

Exkurs: Ternäres balanziertes System

Bachet de Méziriac hat zu seiner Aufgabe noch eine weniger bekannte Variante gestellt: Welches ist der sparsamste Satz von Wägestücken, wenn diese auf jede der beiden Waagschalen gelegt werden dürfen?

Ein auf der Gegenseite – also bei der Last – aufgelegtes Gewicht zählt nun negativ, und wir kommen zu den drei Ziffern −1, 0 und +1, entsprechend den drei Möglichkeiten für jedes Wägestück, entweder links, rechts oder gar nicht aufgelegt zu werden. Also brauchen wir als Abstufung nur den großzügigeren Faktor 3 statt 2.

Das dazu passende Zahlensystem ist ein ternäres, aber nicht das gewöhnliche mit 0, 1 und 2, sondern das antisymmetrische (oder balanzierte) Ternärsystem, bei dem die 0 in der Mitte der verfügbaren Ziffern liegt. Das bringt den Vorteil mit sich, dass beim schriftlichen Rechnen die Überträge meistens sehr schnell wieder ausgeglichen sind. Es wurde sogar 1958 in der Sowjetunion ein Computer mit diesem Zahlensystem entwickelt.

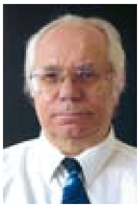
man aus der hier ankommenden Energiestromdichte seine Leistung (den Energieausstoß pro Zeiteinheit) berechnen. Die »absolute Magnitudo« eines Sterns ist diejenige Magnitudo, die der Stern in der Standardentfernung 10 Parsec hätte; das ist die Entfernung, aus welcher der Erdbahnradius unter dem Winkel $\pi/(180 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10)$ (eine zehntel Bogensekunde) zu sehen wäre. Die Entfernung taucht bei einer solchen Rechnung auch als Logarithmus zur Basis $0{,}01^{0{,}2}$ (»Entfernungsmodul«) auf, nämlich als Differenz der absoluten und der scheinbaren Magnitudo.

Der Unterscheidung zwischen Zwergen (Hauptreihensternen), Riesen und Überriesen könnte man relativ treffend den Begriff der Größenklassen zuordnen, der ist aber leider schon vergeben, und so nennt man das – weit weniger treffend – Leuchtkraftklassen.

All die logarithmischen Raffinessen der Astronomie sind nicht messtechnisch, sondern allenfalls historisch und teilweise auch sinnesphysiologisch begründet. Sie sind für Berufsastronomen vermutlich ein erträglicher Zopf, aber für Amateure und erst recht für Schüler, denen man die Beschäftigung mit unserer Wunderwelt nahebringen möchte, völlig unnötige Hürden.

Noch vor wenigen Jahrzehnten waren die Logarithmen in einer ganz anderen Rolle sehr präsent: als Rechenhilfsmittel. Sechsstellige Zahlen »zu Fuß« zu addieren oder zu subtrahieren ist erheblich einfacher, als sie zu multiplizieren, zu dividieren oder gar zu potenzieren. Um das auszunutzen, erfanden John Napier (1550–1617) und Jost Bürgi (1552–1632) etwa gleichzeitig das logarithmische Rechnen: Statt Zahlen zu multiplizieren, addiert man deren Logarithmen. Entsprechend werden Dividieren, Potenzieren und Wurzelziehen durch die wesentlich bequemere Rechenoperation »eine Stufe tiefer« ersetzt. Man braucht nur eine Logarithmentafel, in der man zu jeder Zahl deren Logarithmus ablesen kann und umgekehrt. Das ganze Verfahren ist heute so überflüssig wie mechanische Präzisionsuhren des 18. Jahrhunderts und verdient ebenso wie diese unseren höchsten Respekt.

Wenn sich zwischen Mensa und Bibliothek kein Waschbecken mit Seife befindet oder nicht in wünschenswertem Umfang genutzt wird, kann das zu dem führen, was im antiquarischen Buchhandel »leichte Gebrauchsspuren« genannt wird. Wenn solche Fettflecken in einem Roman aus einer Leihbücherei bevorzugt am Anfang auftreten, kann man dem Autor vorwerfen, dass er keine weit reichende Spannung aufbaut. Eine Logarithmentafel liest man aber nicht von vorne bis zu der Stelle, an der die Langeweile übermächtig wird, sondern greift bei den benötigten Zahlen (Numeri) zu. Simon Newcomb (1835–1909) fand 1881 in einer Logarithmentafel eine derartige Häufung der Abnutzungserscheinungen bei den niedrigen Anfangsziffern. Kann man das erklären? Im nächsten Heft gehen wir der Sache weiter nach. ◁



Norbert Treitz ist apl. Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/951094.